译 者 序

《基础几何学》这本书是苏联著名的通讯院士 A.B. 勃格莱洛夫所著。它论理严谨、逻辑性强、论述方法更是深入浅出。例如：书中把凸多边形的面积定义为所分割成的诸三角形的面积之和，然后，证明凸多边形的面积与分割三角形的方法无关；对简单几何体的体积则定义为所分割成的诸三棱锥（即四面体）的体积之和，并证明了简单几何体的体积与分割成三棱锥的分割方法无关。本书对三角函数的引出也很自然，从三角函数的基本定义出发，然后证明了直角三角形的边角关系。

本书有机地综合了平面几何、平面三角、立体几何、平面向量及坐标法的基本内容，它比我国同类教本在基本概念、基本理论、基本规律方面，论述得更透彻、更明了、更易于理解和运用。它给出了点的位置分布公理，并采用了美国比尔科夫的线段及角的度量公理等。本书在证明方法上还借用了高等数学的“ε法”。此外，书中还包括了我国同类教本中所没有而又比较重要的内容，如：三面角的余弦定理及正弦定理等。书中所举的例题、练习题都有极强的典型性，读者掌握后，可以举一反三，很有实用价值。它对我国数学教学很有借鉴参考价值，是广大初高中学生、社会青年和教师提高数学水平，指导毕业生高考的很有价值的参考书。

本书承蒙高伯阳副教授和王玉林同志译校，并得到了黑龙江省科学技术协会普及部的大力支持。在此，
谨致由衷的感谢！

由于我们水平所限，译文中难免有不妥之处，请读者批评指正。

一九八〇年十二月

目　　录

第一部分　平面几何

第二部分　立体几何

第三部分　几何的解析方法

第一部分　平面几何

§1．最简单几何图形的基本性质

几何学（简称几何）　是研究几何图形性质的科学。几何学（geometria）是希腊词，译成俄语时，用测地学（Землемерие）表示，因为现场测量势必要采用几何方法。

几何图形的例子有：三角形、正方形、圆（如图1）。

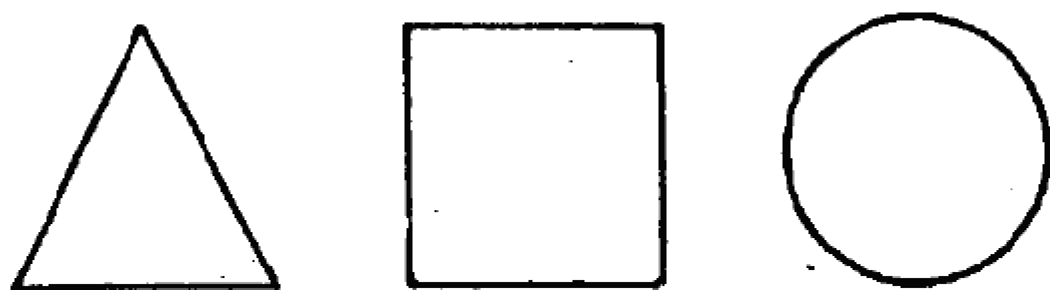


图　1

几何图形多种多样，任意几何图形的一部分仍然是一个几何图形。在图2中，左侧图形由一个三角形和三个正方形组成，而右侧图形则由一个圆和数条圆弧组成。我们可以认为，任何几何图形都由点组成。

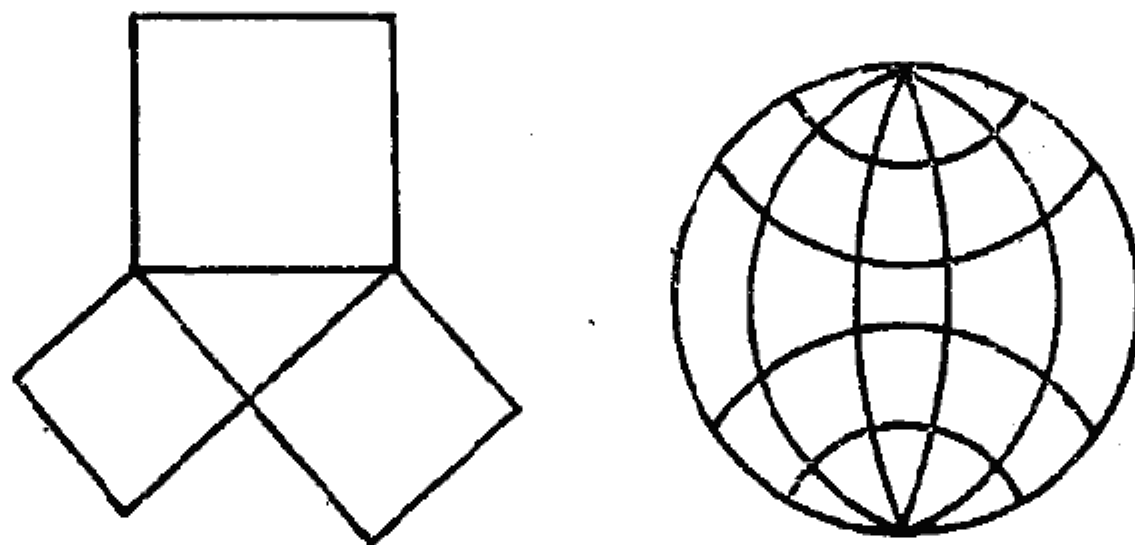


图　2

研究平面图形的几何学叫做**平面几何**. 我们从平面几何开始研究几何学。

点和直线　点和直线是平面上的基本几何图形. 为了清楚起见，点应以一个小圆圈标示. 通常用大写的拉丁字母A，B，C，D，…表示点；用小写的拉丁字母a，b，c，d，…表示直线。在图3中，你可以看到点A和直线a。

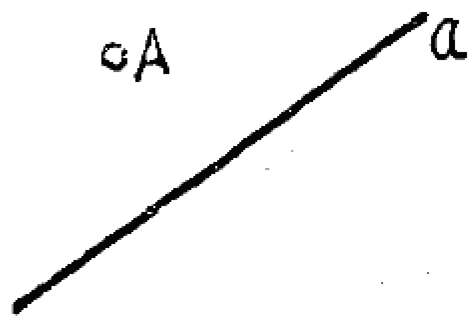


图　3

平面上点和直线的基本性质　请看图4，你可以看到直线a、直线b，点A、点B和点C。点A和点C在直线a上，也可以说，点A和点C位于直线a上，或者说，直线a过点A和点C。

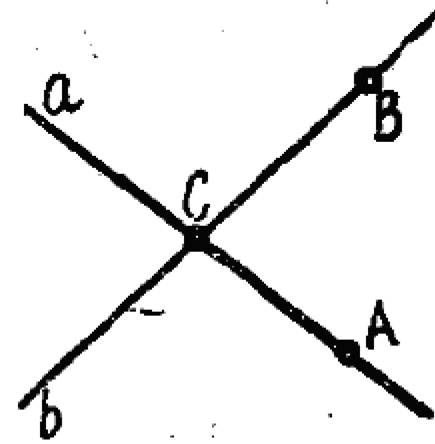


图　4

点B在直线b上，但不在直线a上。点C既在直线a上，又在直线b上。直线a和直线b于C点**相交**，点C是**直线a和直线b的交点**。

用直尺在图纸上画一条直线。在图5中，你可以看到，如何使用直尺画一条过已知点A和点B的直线。

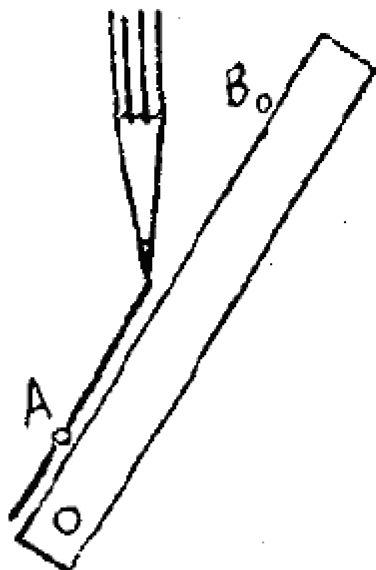


图　5

我们把下面两种性质称为平面上点和直线的基本性质：

I_1　**任意一条直线，都有直线上的点和直线外的点。**

I_2　**经过任意两点都可引出一条而且只能引出一条直线.**

直线可用直线上的两点来表示。例如，图4中的直线a

可以表示为AC，而直线b可以表示为BC。

过两点只能引出一条直线，因此，两条不同的直线可能不相交，也可能相交，但相交时只有一个交点。假如两条不同的直线相交时有两个交点，那么，由这两个交点便可引出两条直线，然而这是不可能的。因此可得出下面的性质：

1.1 两条直线可能不相交，若相交只能有一个交点。

直线和平面上点的相互位置的基本性质 请看图6，你可看到直线a和这条直线上的三个点：点A、点B和点C，点B位于点A和点C之间。关于点A、B、C的位置，我们可以讲，点A和点C位于点B的两侧，还可以讲，点B把点A和点C分隔开。点A和点B在点C的同一侧，点C不分隔点A和点B。点B和点C在点A的同一侧。

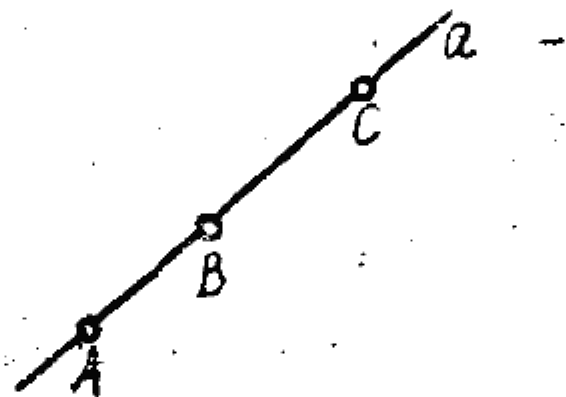


图 6

请看图7，点A把直线a分成两条**射线**。点B和点C在同一条射线上，点A不分隔点B和点C。点B和点D在不相同的两条射线上，点A把点B和点D分隔开。把直线a分成两条射线的点A叫做射线的**端点**，这两条射线方向相反。**光线**就是射线。

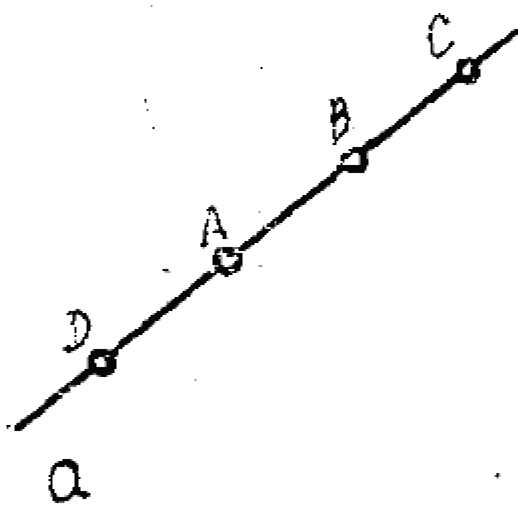


图 7

射线用小写的拉丁字母来表示，还可用射线的端点和射线上任意一点来表示，此时用大写的拉丁字母，但表示端点的字母必须写在前面。如点A把直线a分成射线AB和射线AD（如图7）。

设 A和B是直线a上的两个点（如图8），直线a上

AB一段叫做**线段** AB，直线 a 上 A 和 B 之间所有的点 x 都在直线 a 上，点 A 和点 B 叫做线段的**端点**。

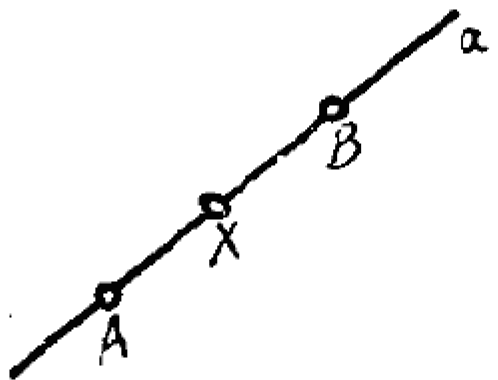


图 8

1.2 线段AB是射线AB的一部分，即线段AB上每个点都是射线AB上的点。

在实际中，我们标记线段 AB 上某一点 X 时（如图 8），点 X 应位于点 A 和点 B 之间，即点 A 不在点 X 和点 B 之间，因为在点 A、点 B 和点 X 中，只能有一个点在其它两点之间，因此点 A 不能分隔点 X 和点 B。这就是说，点 X 在射线 AB 上，而不在与射线 AB 的方向相反的射线上。

请看图 9，直线 a 将平面分割成两个半平面，点 A 和点 B 在同一半平面内。线段 AB 与直线 a 不相交，点 A_1 和点 B_1 在不同的半平面内，线段 A_1B_1 与直线 a 相交。我们用希腊字母 α，β，γ，…等表示半平面。

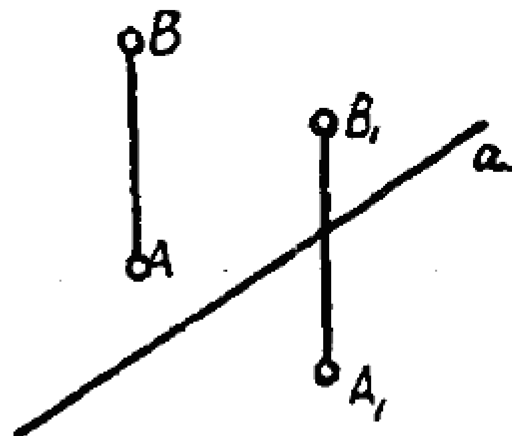


图 9

过射线 AB 的端点 A 作一条不经过点 B 的直线 a（如图10），直线 a 与直线 AB 交于点 A，除此交点外，再无其他交点。设 X 为射线 AB 上的一点，线段 BX 与直线 a 不相交。在实际上，线段 BX 能与直线 a 交于点 A 吗？是不可能的。因为，点 A 不在线段 BX 上，点 A 不在点 B 和点 X 之间。

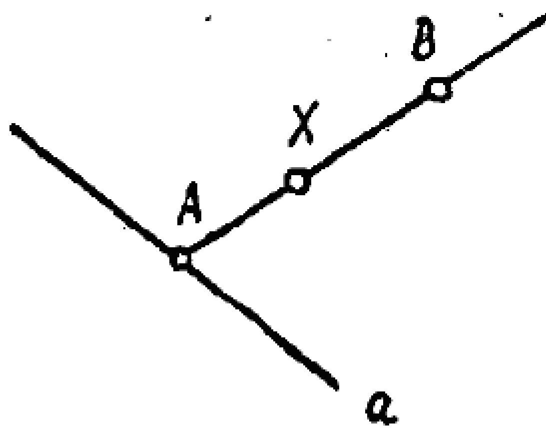


图 10

因为线段BX不与直线a相交，所以点X和点B，对直线a而言，都位于同一半平面内。由此可得出下面的性质：

1.3　**假如过射线AB上点A作一条不经过点B的直线a，则整条线段AB，对直线a而言，都在同一半平面内。**

因为线段AB是射线AB的一部分，所以，又可得出下面的性质：

1.4　**假如过线段AB上端点A作一条不过点B的直线a，则整条线段AB，对直线a而言，都在同一半平面内，即线段AB在其端点B所在的半平面内。**

我们把下面三个性质叫做直线和平面上点的位置的基本性质：

I_1　直线上的三个点，其中只能有一个点位于其他两点之间。

I_2　直线上的一点可把直线分割成两条射线，同一条射线上的两个点不可能被这条射线的端点分隔，这条射线上的端点只能分隔不同射线上的两个点。

I_3　直线可把平面分割成两个半平面。如果某一条线段的两个端点都在同一半平面内，则这条线段不可能与直线相交。如果线段的两个端点在不同的半平面内，则这条线段必与直线相交。

线段和角的度量的基本性质　度量线段需要各种量具，

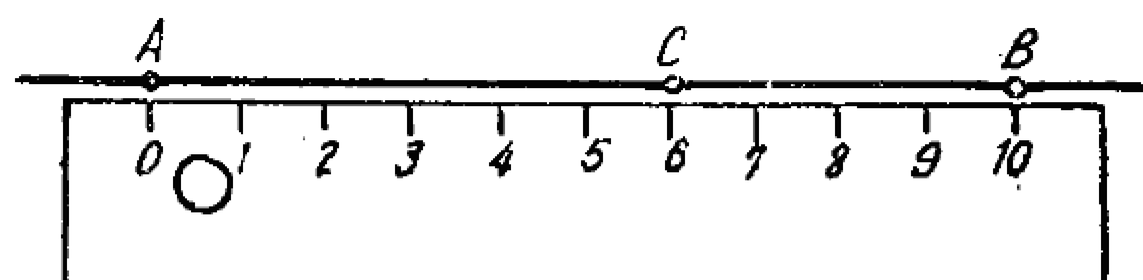


图 11

带刻度的直尺是常用的一种量具。图11示出，线段 AB 的长度为10cm，线段AC为6cm，线段BC为4cm。线段AB的长度等于线段AC与BC的长度之和。

我们把下面的性质叫线段度量的基本性质：

Ⅲ$_1$ 每一条线段都有大于零的固定长度。

Ⅲ$_2$ 如果直线 AB 上点 C 位于点A和点 B 之 间，则线段AB的长度必等于线段AC 与 BC 的长度之和。

从同一个端点引出两条不同射线所组成的图形叫做**角**。这个端点叫做**角的顶点**，两条射线叫做**角的边**。如果角的两条边是两条方向相反的射线，则这个角叫做**平角**。

在图12中，你看到的角，其顶点为 O，其边为 a 和 b 。

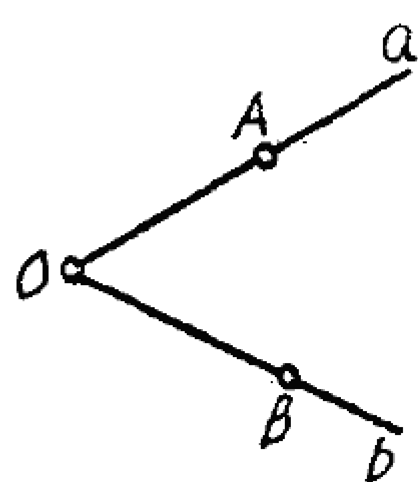


图 12

角可用角的顶点，角的两条边或用三个点（即：顶点及角的两条边上的两个点来表示）。角用符号“∠”表示。图12中的角有三种表示法，即：$\angle O$，$\angle(ab)$，$\angle AOB$，第三种表示法，表示顶点的字母必须放在中间。

请看图13，如果由$\angle(ab)$的顶点 O引出的射线 c 与两个端点位于$\angle(ab)$的两条边上的线段AB相交时，那么我们可以说：射线 c 由$\angle(ab)$的两条边之间穿过。当角为一个平角时，如果从角的顶点所引出的射线不与角的两条边重合时，那么我们也可以说：射线必在角的两条边之间穿过。

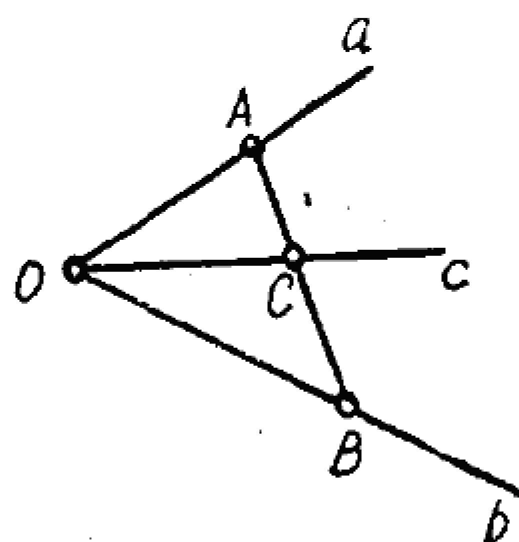


图 13

通常使用量角器度量角的大小，图14所示：$\angle(ab)$为120°．射线 c 由角(ab)的两条边之间穿过，角(ac)为90°，角(bc)为30°．角(ab)等于角(ac)与角(bc)之和．

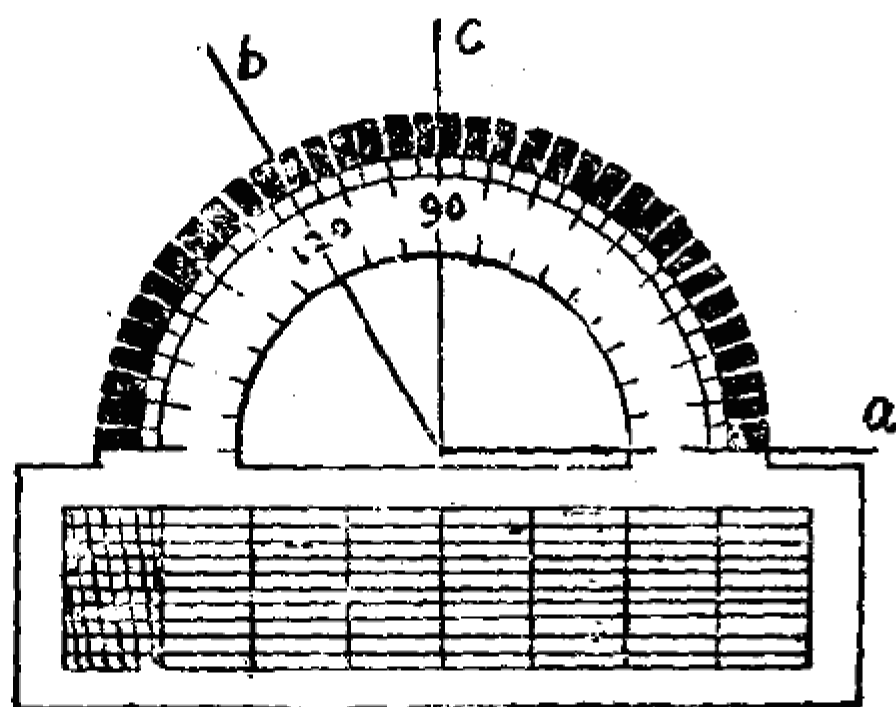


图 14

我们把下面的性质叫做角的度量的基本性质：

Ⅲ_3 每一个角都有大于零的固定的度数，平角为180°．

Ⅲ_4 如果由角(ab)的顶点所引出的射线 c，从角的两条边之间穿过，则角(ab)等于角(ac)与角(bc)之和．

线段和角的绘制的基本性质 请看图15，此图示出，使用直尺可从射线 a 的端点 A 画出长度为3cm 的线段．

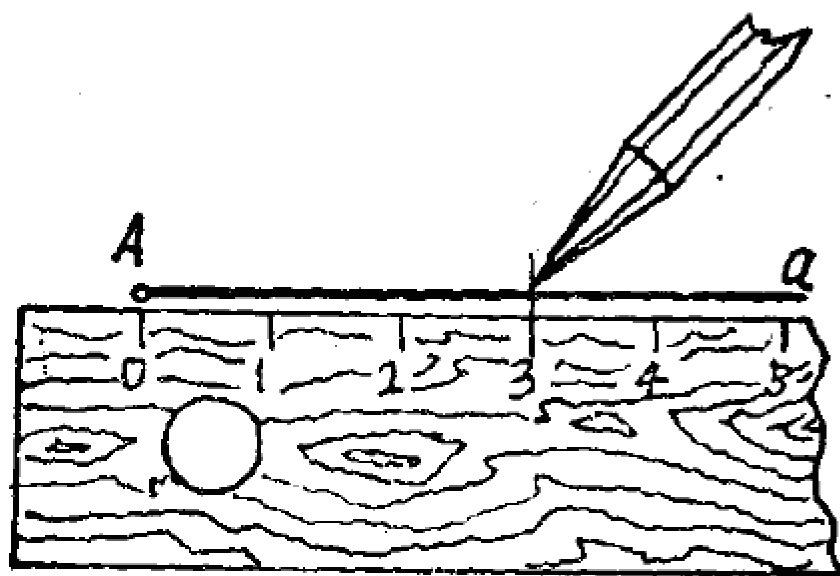


图 15

请看图16，射线 a 从端点 A 向其相反方向延长后，射线 a 把平面分割成两个半平面。

图16示出，如果使用量角器以射线 a 为角的一边，以端点 A 为角的顶点，在上半平面上绘制出具有给定度数(60°)的角。

我们把下面的性质叫线段和角的绘制的基本性质：

$Ⅳ_1$ 已知m为任意一个正数，总可以在已知的射线上从它的端点绘制一条，而且只能绘制出一条长度为m(cm)的线段。

$Ⅳ_2$ 已知n为任意一个小于180°的正数，总可以在已知的半平面上以已知的射线为一条边，以射线的端点为顶点绘制一个，而且只能绘制出一个等于n度的角。

让我们在射线 AB 上，从它的端点 A 绘制出一条长度小于线段 AB 的线段 AC。A、B、C 三点中，哪一个点在另外两个点之间呢？点 A 显然不在点 B 和 C 之间，因为点 B 和点 C 在以点 A 为端点的同一侧射线上。假如点 B 位于点 A 和点 C

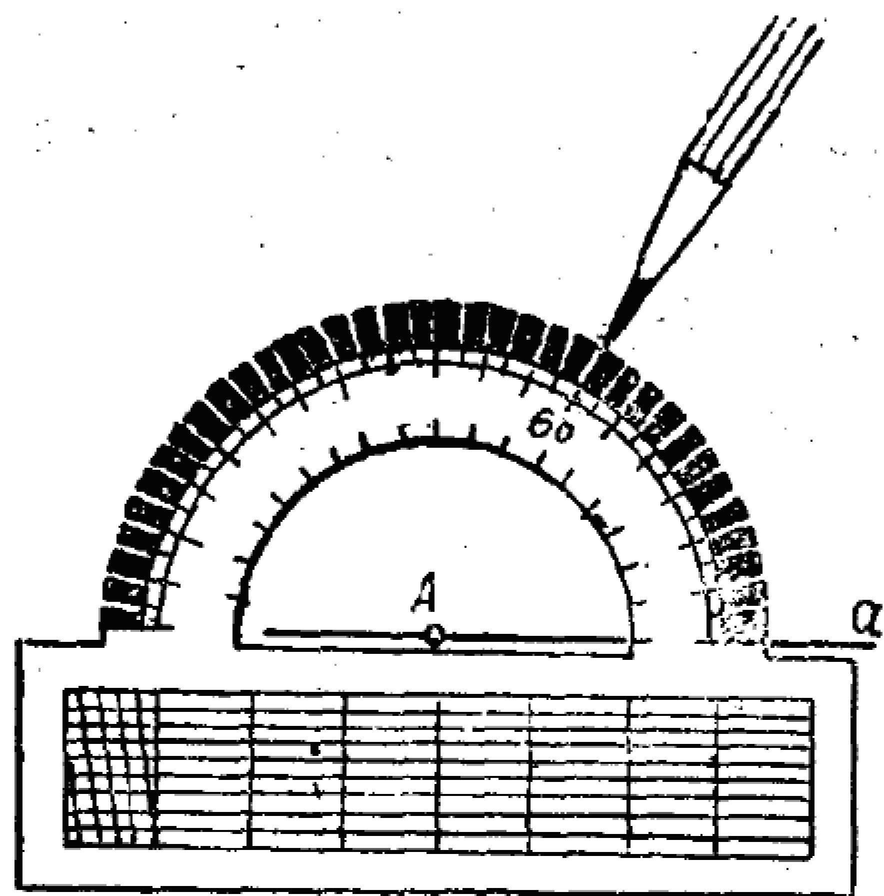


图 16

之间，根据线段的度量的基本性质，可得出：$AB+BC=AC$，即$AB<AC$，然而，给定的条件是$AC<AB$，这就是说，点B也不可能位于点A和点C之间。因为三点中必应有一个点在另外两个点之间，这个点只能是点C。因此可得出下面的性质：

1.5 假如在射线AB上从它的端点A绘制一条长度小于线段AB的线段AC，则点C必应在点A和点B之间。

全等三角形的第一判定法 由三个不在一条直线上的点，并由这三个点双双两点连结成的三条线段所组成的图形叫做**三角形**。这三个点叫做三角形的**顶点**，这三线段叫做三角形的**边**。在图17中，你可以看到一个以A、B、C为顶点，

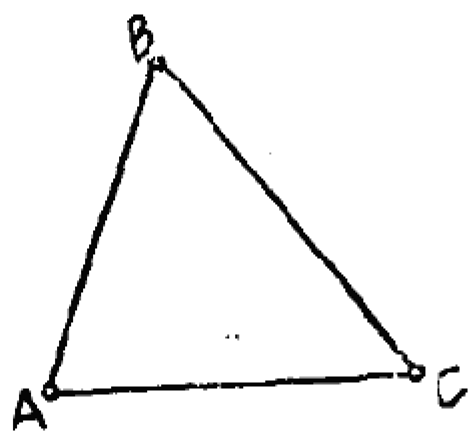
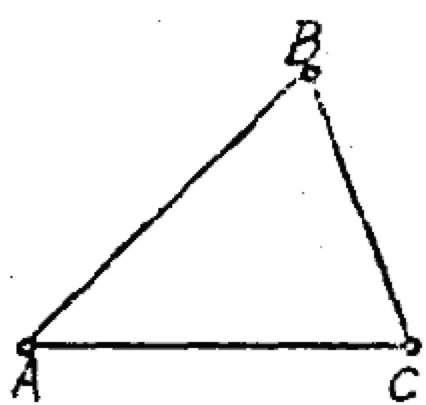


图 17



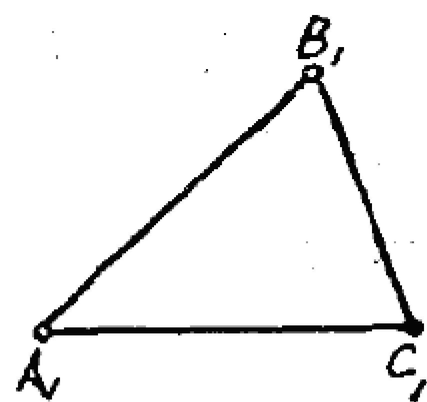


图 18

以AB、BC、AC为边的三角形。三角形通常以三个顶点来表示，“三角形”这个词用符号“△”来表示。例如，图17中的三角形表示为：$\triangle ABC$。

两条长度相等的线段叫做**相等的线段**。度数相等的两角叫做**相等角**。在三角形ABC和三角形$A_1B_1C_1$中，如果$\angle A=\angle A_1$，$\angle B=\angle B_1$，$\angle C=\angle C_1$，$AB=A_1B_1$，$BC=B_1C_1$，$AC=A_1C_1$，则三角形ABC与三角形$A_1B_1C_1$全等，通常用符号“≌”表示全等。在图18中可以看到：$\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$。

全等三角形的第一判定法如下：

Ⅴ　在三角形ABC和三角形 $A_1B_1C_1$ 中，如果 $\angle A=\angle A_1$，$AB=A_1B_1$，$AC=A_1C_1$，则 $\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$，即 $\angle B=\angle B_1$，$\angle C=\angle C_1$，$BC=B_1C_1$。

平行线的基本性质　在同一平面内，不相交的两条直线叫做**平行线**。这里所指的直线应当理解为两端是无限的。

图19示出，如何使用三角板和直尺，过点 B 作一条平行于已知直线 a 的直线 b。

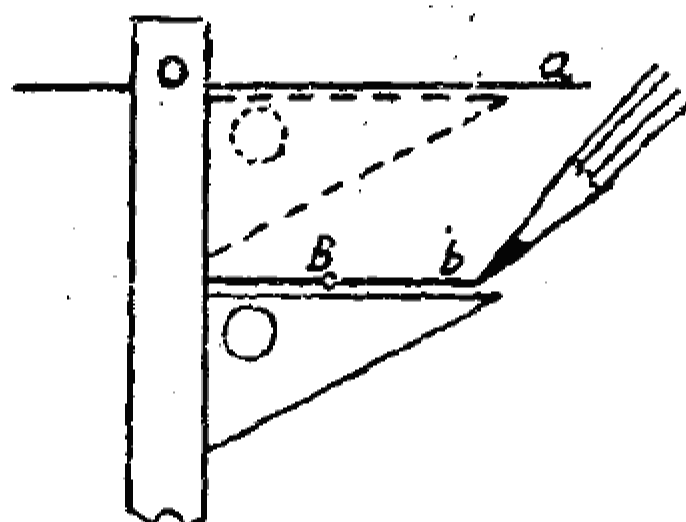


图　19

平行线的基本性质如下：

Ⅵ　在同一平面内，过已知直线a外一点B，可作出一条，而且只能作出一条平行于直线a的直线。

复习题及练习题

1．什么是几何学？

2．例举几个几何图形。

3．指出平面上的几何基本图形。

4．什么是平面几何学？

5．如何在图纸上画点？

6．画直线用什么制图仪器？

7．如何表示点和直线？

8．在图4中，哪两个点在直线 a 上？哪两个点在直线 b 上？直线 a 和直线 b 交于哪个点？

9. 试讲解如何使用直尺画一条过已知两点的直线。

10. 用定义说明平面上点和直线的位置的基本性质。

11. 请讲解为什么两条直线不可能有两个交点。

12. 在图 6 中有三个点。哪个点分隔另外两个点？对点 A 而言，点 B 和点 C 位于何处？

13. 作一条直线，并在这条直线上算出 A、B、C、D 四个点，使点 C 分隔点 A 和点 D，而点 D 分隔点 B 和点 C。

14. 直线被点分割成两条射线后，这两条射线具有何种性质？射线如何表示？

15. 说出以 A 和 B 为端点的线段的名称。

16. 如果 B 点是线段 AC 上的一个点，A、B、C 三点中，哪一个点位于另外两个点之间？

17. 试说明为什么线段 AB 上的任意点都是射线 AB 上的点。

18. 平面被直线分割成两个半平面之后，这两个半平面具有何种性质？

19. 试说明射线 AB 相对于过射线端点 A 的直线 a 而言的位置。

20. 说明点在直线上和在平面上的基本性质。

21. 度量线段使用何种工具？

22. 作一条直线，并在直线上标出 A、B、C 三点，使 B 点位于点 A 和点 C 之间，量出线段 AB、AC 和 BC 的长度，试比较线段 AC 的长度与线段 AB 及 BC 之和的长度。

23. 说明线段的度量的基本性质。

24. 什么样的图形叫做角？

25. 什么样的角叫做平角？

26. 角如何表示？

27. 请讲解射线从角的两条边之间穿过是什么意思。

28. 使用什么工具度量角，用什么单位来表示？试说明如何度量角。

29. 画出角（ab），并在角内自其顶点作一条射线 c，试度量角（ab）、角（ac）和角（bc），再比较角（ab）是否等于角（ac）与角（bc）之和。

30. 试说明度量角的基本性质。

31. 任意取一点 O，过此点作出一条射线，以 O 点为端点，在这条射线上截取一条线段 OA，使其长为 $5cm$。

32. 画任意一条射线，并以这条射线为一条边，画出 $45°$ 的角。

33. 说明线段和角绘制的基本性质。

34. 在射线 AB 上，以点 A 为端点截取一条小于线段 AB 的线段 AC。试回答 A、B、C 三点中，哪一个点位于另两个点之间？并说明为什么？

35. 什么样的图形叫做三角形？

36. 指出图17中三角形的顶点和边。

37. 什么样的线段叫做相等的线段？

38. 什么样的角叫做相等的角？

39. 三角形 ABC 与三角形 $A_1B_1C_1$ 全等，这句话表示什么意思？

40. 说出全等三角形的第一判定法。

41. 两条什么样的直线叫做平行线？

42. 画出一条直线，并标出这条直线外的一点，试过这点作这条直线的平行线。

43. 说明平行线的基本性质。

§2. 在几何中怎样研究图形的性质

公理、**定理**和**证明**　经过推理可以对任何一个几何图形作出正确的结论，对结论的正确性的论证叫做**证明**。对几何图的性质作出的正确结论叫做**定理**。例如：

定理2.1　设有一条不经过三角形ABC各顶点的直线a，如果直线a与三角形ABC的AB边相交，则直线a必应与、且只能与三角形另两条边BC和AC中的一条边相交。

证明（图20）　直线 a 把平面分割成两个半平面，因为直线 a 和线段 AB 相交，所以点 A 和点 B 在不同的半平面内。点 C 只能在这两个半平面的一个半平面内，假如点 C 与点 A 在同一半平面内，则直线 a 不可能与线段 AC 相交，直线 a 必

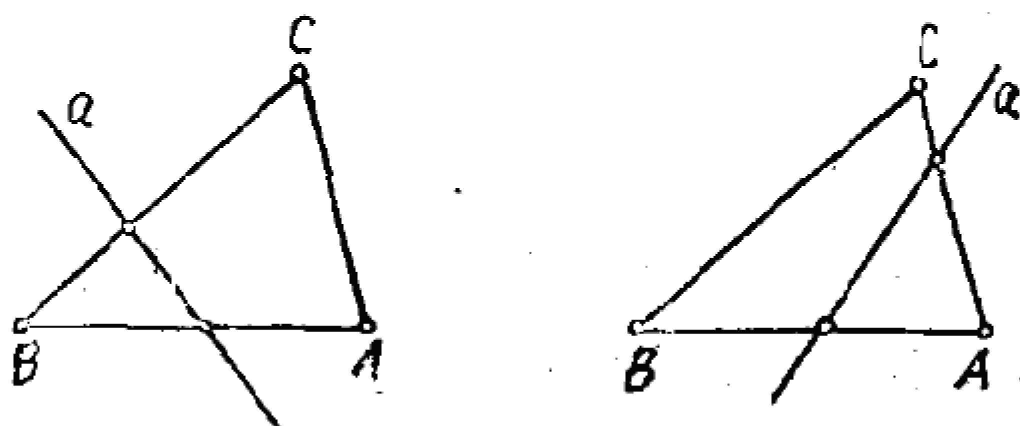


图　20

应与线段 BC 相交（如图20—左）；假如点 C 与点 B 在同一半平面内，则直线 a 必应与线段 AC 相交，但不可能与线段 BC 相交（如图20—右）。在上述两种条件下，直线 a 只能与线段 AC 或 BC 中的一条线段相交。这就是证明的全部。

前一章所叙述的最简单几何图形的基本性质Ⅰ—Ⅵ，在证明其它性质时，经常引用。这些不需证明的最基本性质叫做**公理**。

公理概括地给出**基本的几何概念**。这些基本概念包括："点"、"直线"、"位于"（对点和直线而言）、"位于……之间"（对点在直线上位置而言）、"度量"（对线段的长度及角的度数而言）。其它一些几何概念都是由这些基本概念派生的。例如：线段、角、三角形等概念。

证明定理时，只允许引用最简单几何图形的基本性质，即公理，还可引用已被证明的性质，即已被证明的定理。除此之外，不准引用那些显而易见、但未经证明的性质。

证明定理时，可以利用绘制图形来表达我们想叙述的内容。然而，论证图形的性质时，不准引用即使在图形上可以明显看出的、但未经公理及已证明的定理推论出的性质。定理通常由两个部分组成，前一个部分是已知的内容，这一部分叫做定理的**条件**，后一部分是必须证明的部分，这部分叫做定理的**结证**。

在§1中，除罗马数字所表示的那几项基本性质即公理外，其它一些性质（1.1，1.2，1.3，1.4，1.5）都是借助于公理推证出来的。因此，这些性质都是定理。

在同一半平面内的诸角的位置

定理2.2　在同一半平面内，从射线a作角（ab）和角（ac），则或射线b从角（ac）的两条边之间穿过，或射线c从角（ab）的两条边之间穿过。

这个定理的条件：角（ab）和角（ac）位于射线a所分割的同一半平面内。定理的结论：或射线b从角（ac）的两条边之间穿过，或射线c从角（ab）的两条边之间穿过。

定理的证明：　从射线a的端点引一条与射线a方向相反的射线a_1。角（a_1b）与角（a_1c）不相等，即两角中有一个角小于另一个角，设角（a_1b）小于角(a_1c)。在射线a、

b、a_1上标出点A、B、A_1（如图21）。

包含射线 c 的直线与三角形A_1AB的边A_1A 相交。根据定理2.1可知，这条包含射线 c 的直线或与 A_1B 边相交，或与AB边相交。这种相交必发生在射线 c 上，即射线 c 或与线段A_1B相交，或与线段 AB 相交，因线段A_1B、AB及射线 c 位于直线A_1A所分得的两半平面中的同一个半平面内。

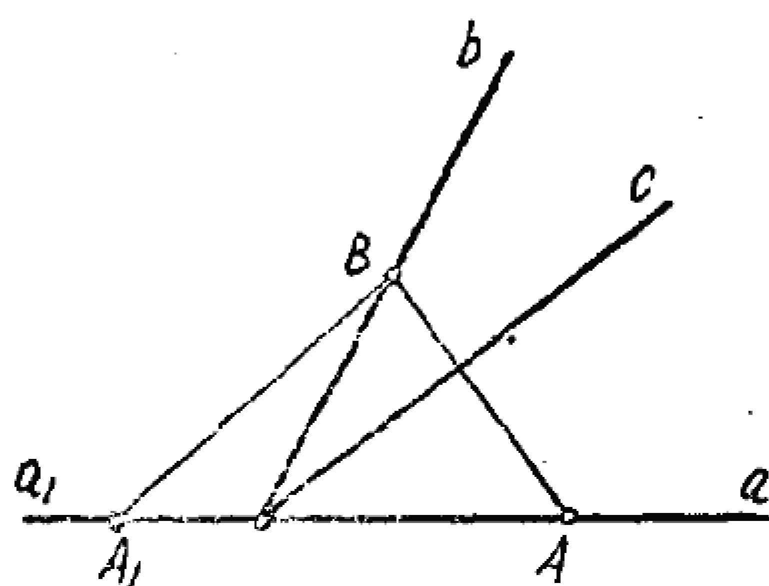


图 21

假如射线 c 与线段A_1B相交，则射线 c 必应从角(a_1b)的两条边之间穿过。根据度量角的公理Ⅲ$_4$可得出：角(a_1c)+角(cb)=角(a_1b)，即角（a_1c）小于角（a_1b）。然而，这是不可能的，因为命题的条件为：角（a_1b）小于角(a_1c)。因此，射线 c 不与线段A_1B相交，必与线段 AB 相交。这便意味着，射线 c 从角（ab）的两条边之间穿过。定理得证。

直线分隔角的两条边

定理2.3　如果射线 c 从角（ab）的两条边之间穿过，则包含射线c的直线必应分隔角(ab)的两条边，即射线 a 和射线 b 位于包含射线 c 的直线所分割的两个不同的半平面内。

定理的条件：射线 c 从角（ab）的两条边之间穿过。定理的结论：角（ab）的两条边位于包含射线 c 的直线所分割的两个不同的半平面内。

定理的证明：因为射线 c 从角（ab）的两条边之间穿过，所以射线 c 必与两端在角两边上的线段AB 相交（如图22）。因为线段 AB 与包含射线 c 的直线相交，所以点 A和

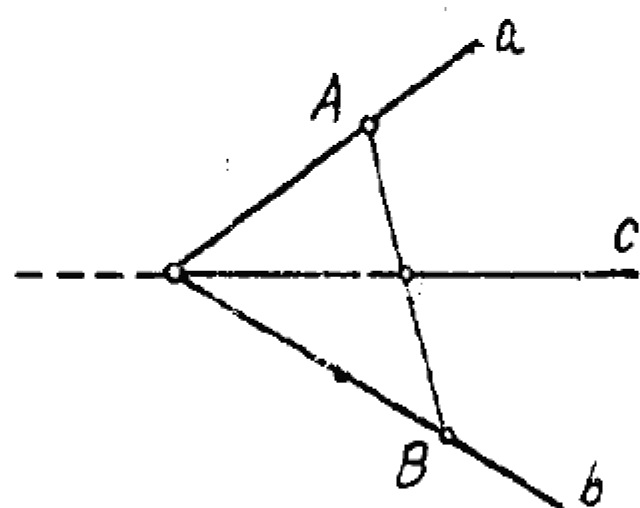


图 22

点 B 必位于这条直线所分割的两个不同的半平面内。

根据定理1.3得知：射线 a，对包含射线 c 的直线而言，位于同一半平面内，即位于点 A 所在的半平面内。根据同一定理可知：射线 b 位于点 B 所在的半平面内。因为点 A、点 B 对包含射线 c 的直线而言，位于不同的半平面内，所以射线 a、b 对包含射线 c 的直线而言，也位于不同的半平面内。定理得证。

复习题及练习题

1．对什么的论证叫做几何证明？
2．什么是定理？
3．举一个定理及其证明的例子。
4．什么是公理？
5．说明关于点与直线位置的公理。
6．说明关于线段和角的度量的公理。
7．说明关于线段和角的绘制的公理。
8．说明基本的几何概念。
9．举例说明由基本概念派生的其它概念，并用基本概念给出它们的定义。
10．证明定理时，允许引用几何图形的何种性质？
11．证明定理时，如何利用图形？
12．定理由哪两部分组成？
13．说出并证明关于同一半平面内角的位置的定理（定理

2.2）。

14. 说出并证明关于分隔角两边的直线的定理(定理2.3）。

15. 证明§1中定理1.1、1.2、1.3、1.4和1.5。

16. 在平面内给出四点A_1、A_2、A_3和A_4，并作出直线a，使其不通过上述四点中任意一点。已知：线段A_1A_2及A_3A_4均与直线a相交，而线段A_2A_3不与直线a相交。试问：直线a是否与线段A_1A_4相交？并说明答案的理由。

17. 在平面内给定四点A、B、C、D，如果线段AB与线CD相交，证明点B和点D，对直线AC而言，位于同一半平面内。

18. 如果射线c从角(ab)两边之间穿过，证明射线c与两端点在角(ab)两边上的任意线段相交。

19. A、B、C三点在同一直线上。如果已知线段$AB=10cm$，线段$AC=7cm$，线段$BC=3cm$，试问三点中哪一点位于另两点之间？并说明答案的理由。

20. 已知：线段$AB=5cm$，线段$BC=6cm$，线段$AC=7cm$，试问A、B、C三点是否在一条直线上？并说明答案的理由。

21. A、B、C三点在同一直线上；线线$AB=4cm$，线段$BC=3cm$。如果点B位于点A和点C之间，试问线段AC等于多少cm？如果点C位于点A和点B之间，试问线段AC等于多少cm？并说明答案的理由。

22. A、B、C、D四点位于同一直线上，点B位于点A和点C之间，而点C位于点B和点D之间。证明点C位于点A和点D之间。（提示：射线CA与射线CD方向相反，点B位于射线CA上。）

§3. 角

补角 如果两个角有一个公共边，且另二边为两条方向相反的射线，则这两个角互为补角，如图23所示：角（a_1b）与角（a_2b）互为补角。

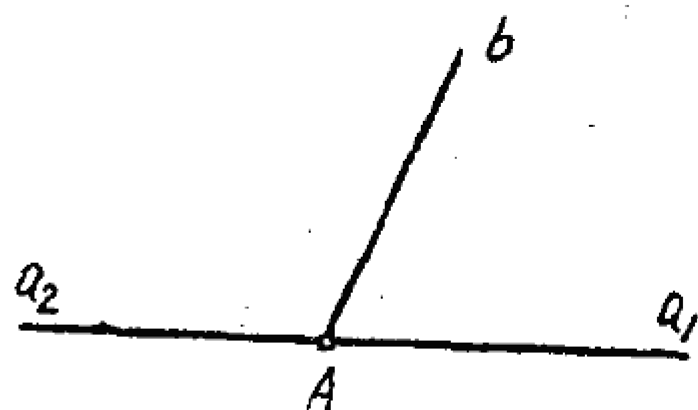


图 23

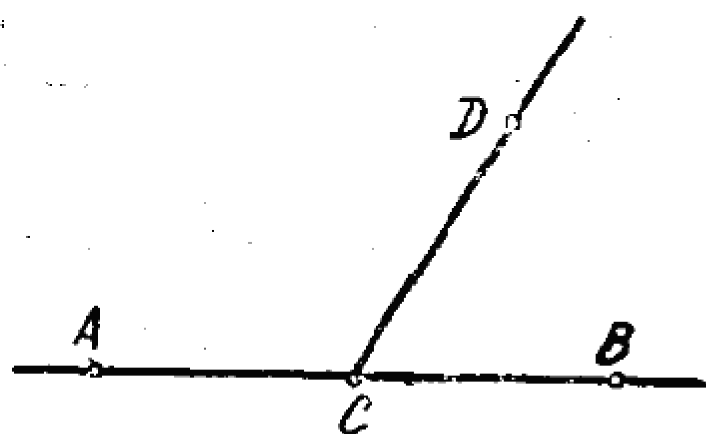


图 24

设C为直线AB上的一点，并位于点A与点B之间，而D为直线AB外的一点（如图24），$\angle BCD$与$\angle ACD$互为补角，这两个角有一条公共边，CA与CB边又是直线AB上两条方向相反的射线，因为端点C将这两条射线上的点A和点B分隔。

定理3.1 互为补角的两个角之和等于180°。

证明 已知角（a_1b）和角（a_2b）互为补角(如图23)，射线b从平角两边a_1和a_2之间穿过，因此根据公理Ⅲ_4可得出：角（a_1b）与角（a_2b）之和等于平角，即等于180°。定理得证。

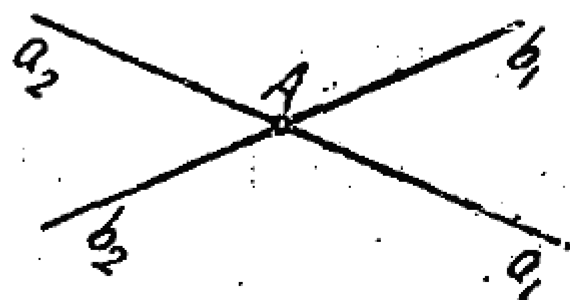


图 25

由定理3.1 可以推出：两个相等的角，其补角相等。

对顶角 如果一个角的两条边与另一角的两条边互为方向相反的射线，则这两个角称为对顶

角。如图25所示：角（a_1b_1）与角（a_2b_2）为对顶角。

定理3.2　对顶角相等。

证明　设（a_1b_1）和（a_2b_2）为已知的两个对顶角（如图25），角（a_1b_1）的补角为角（a_1b_2），角（a_2b_2）的补角也为角（a_1b_2），因此，根据定理 3.1 得出：角（a_1b_1）与角（a_1b_2）之和等于180°，角（a_2b_2）与角（a_1b_2）之和也等于180°，所以角（a_1b_1）等于角（a_2b_2）。定理得证。

直角　垂线　等于90°的角称为直角。根据定理3.1得出：直角的补角仍为直角。

设 a 和 b 为两条相交的直线（如图26），这两条直线相交组成四个角，设其中一角为 α 角，其余三个角中有两个是 α 角的补角，有一个是 α 角的对顶角。由此可得出：如角 α 等于直角，则其余的三个角都是直角。在这种情况下，我们说：如果两条直线互相垂直相交，则称这两条直线为垂线，它们所形成的角都是直角。

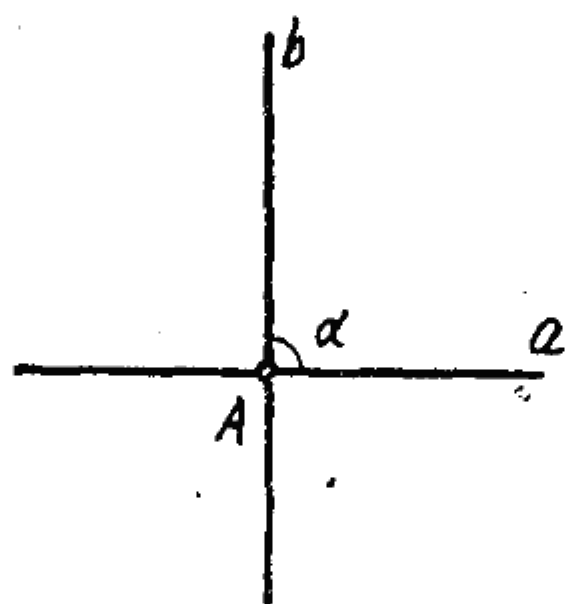


图　26

定理3.3　过直线上一点作垂线，只能作一条。

证明　设已知直线为 a；A 为这条直线上的一点。在直线 a 上，以点 A 为端点画一条射线 a_1（如图27），再以射线 a_1 为一边，以点 A 为顶点作一个等于 90° 的角（a_1b_1），此时包含射线 b_1 的直线与直线 a 垂直相交。

假设除上述所引出的直线外，还能引另一条包含射线 c_1 的直线，此直线经过 A 点，与直线 a 垂直相交，并与射线 b_1 在同一半平面内。

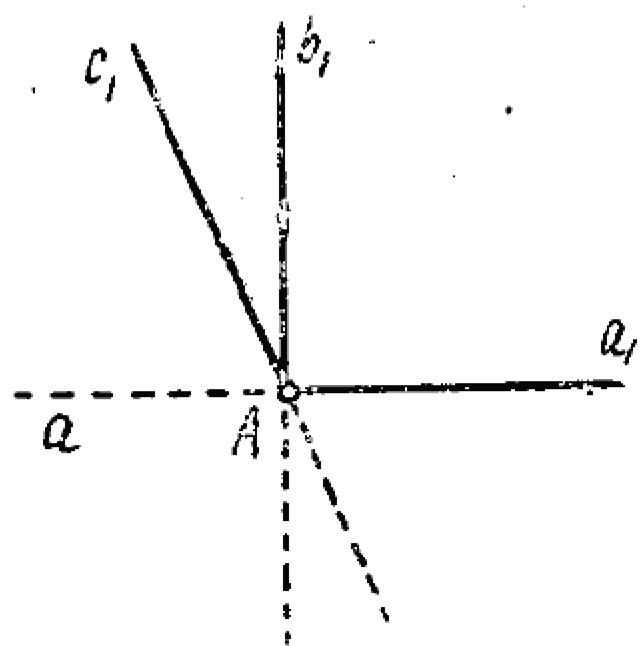


图 27

角（a_1b_1）和角（a_1c_1）都等于90°，而且对射线a_1而言，都在同一半平面内．然而，根据公理可断定：在已知的半平面内，以射线a_1为一边，以A为顶点只能作出一个等于90°的角．因此，过A点不可能作出另一条垂直于直线a的直线．定理得证．

复习题及练习题

1．什么样的角互为补角？
2．说明图24中的$\angle DCA$与$\angle DCB$为什么互为补角．
3．试证互为补角的两角之和等于180°．
4．试证两个相等的角其补角仍然相等．
5．什么样的角称为对顶角？
6．证明对顶角相等．
7．什么样的角称为直角？
8．证明直角的补角仍为直角．
9．试证两条直线相交，如其中有一个角是直角，其余三个角必然也是直角．
10．试证过直线上一点作垂线，只能作一条．
11．角（ab）为120°，角（ac）为150°．包含射线a的直线将平面分成两个半平面，如射线b与c在同一半平面内，角（bc）等于多少度？如射线b及c在不同的半平面内，角（bc）等于多少度？

12. 两个互补的角，其中一角等于另一角的二倍，求两角的度数。

13. 两个互补的角，其中一角比另一角大30°，求两个角的度数。

14. 线段AB、CD相交于O点，证明$\angle AOC$与$\angle BOD$为对顶角。

15. 两条直线相交，其中一个角等于60°，求其他三个角的度数。

§4. 全等三角形

全等三角形的第二判定法 公理V建立起全等三角形的第一判定法。下面的定理建立起全等三角形的第二判定法：

定理4.1 在三角形ABC和$A_1B_1C_1$中，如果$AB=A_1B_1$，$\angle A=\angle A_1$，$\angle B=\angle B_1$，则$\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$，即$AC=A_1C_1$，$BC=B_1C_1$，$\angle C=\angle C_1$，（如图28）。

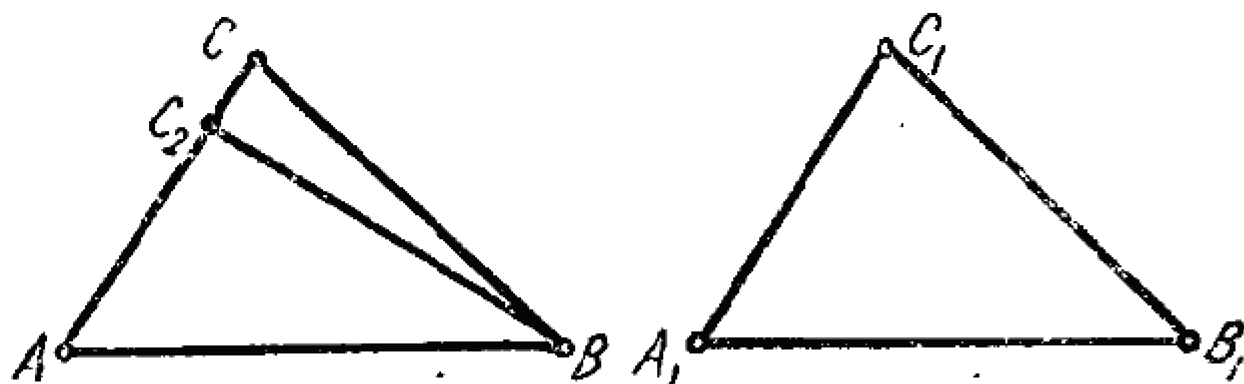


图 28

证明 假如这两个三角形中，$AC=A_1C_1$，则根据全等三角形的第一判定法（公理V）得出两个三角形全等。设$AC\neq A_1C_1$，即或$AC>A_1C_1$，或$AC<A_1C_1$，这里明确地令$AC>A_1C_1$。

在射线AC上画出等于A_1C_1的线段AC_2，根据定理1.5，

点 C_2 位于 A 与 C 之间。按定理条件 $AB=A_1B_1$，$\angle A=\angle A_1$，并且作图得 $AC_2=A_1C_1$，因此由全等三角形第一判定法得出 $\triangle A_1B_1C_1\cong\triangle ABC_2$，$\angle A_1B_1C_1=\angle ABC_2$，而根据定理的条件 $\angle A_1B_1C_1=\angle ABC$，故 $\angle ABC_2=\angle ABC$。

射线 BC_2 从射线 BA 与射线 BC 之间穿过，这是因为射线 BC_2 与线段 AC 相交，$\angle ABC_2<\angle ABC$，这和上面所得的 $\angle ABC_2=\angle ABC$ 矛盾。定理得证。

等腰三角形 两边相等的三角形称为等腰三角形。相等的两边称为腰，而第三边称为三角形的底边（如图29）。

定理4.2 等腰三角形的两底角相等。即 △ABC 中，如 AC=BC，则 ∠A=∠B。

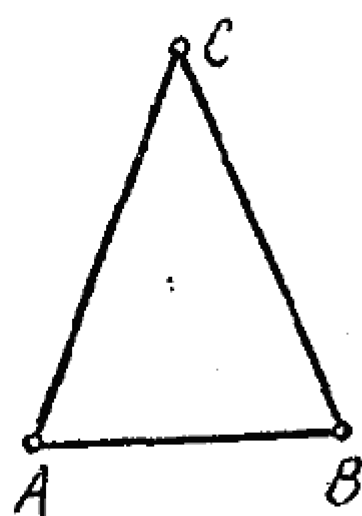


图 29

证明 因 $CA=CB$，$CB=CA$，$\angle C=\angle C$，所以根据全等三角形的第一判定法，$\triangle CAB\cong\triangle CBA$。由于这两个三角形全等，即得 $\angle A=\angle B$。定理得证。

定理4.3 在 △ABC 中，如果 ∠A=∠B，则三角形为等腰三角形，即 AC=BC。

证明 因 $AB=BA$，$\angle B=\angle A$，$\angle A=\angle B$，所以，根据全等三角形的第二判定法，$\triangle ABC\cong\triangle BAC$，由于这两个三角形全等，即得 $AC=BC$。定理得证。

定理4.3是定理4.2的逆定理。定理4.2的结论是定理4.3的条件，而定理4.2的条件是定理4.3的结论。不一定每个定理都有逆定理，所谓没有逆定理，就是说，已知定理是正确的，而其逆定理是不正确的。

现以定理2.3为例，说明这种情况。按逆定理的定义，

定理2.3的逆定理应为：如果包含射线 c 的直线过角（ab）的顶点，并分隔角的两条边，则射线 c 从角（ab）的两边之间穿过。这个结论是不正确的，请看图30。包含射线 c 的直线分隔角（ab）的两条边，然而，射线 c 并未从角（ab）的两条边之间通过，因为射线 c 不与两端在角（ab）的两条边上的任意线段相交，仅射线 c 的反向射线从角（ab）的两条边之间通过。

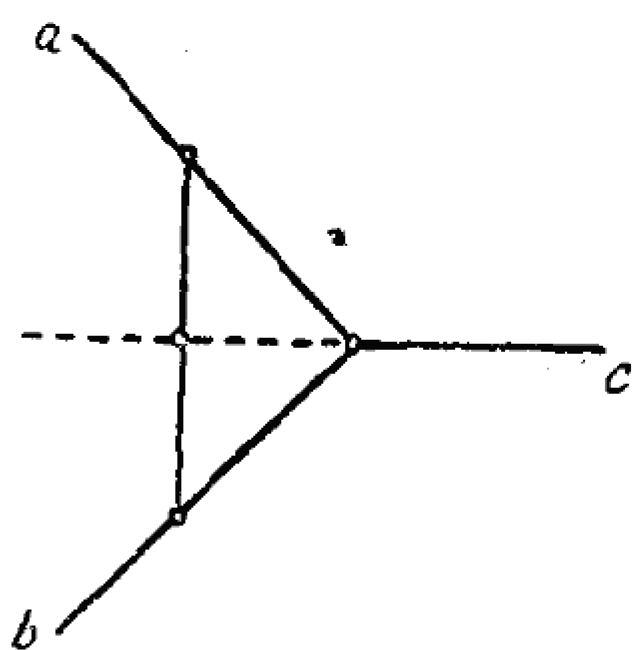


图30

三角形的中线，角平分线及顶垂线（高）

设D为三角形ABC的底边 AB上的一点（如图31），假如D点是线段 AB 的中点，即$AD=BD$，则线段 CD 就是$\triangle ABC$ 中底边AB上的**中线**。假如射线CD从三角形CA与CB两边中间通过，并且CD平分角C，即$\angle ACD=\angle BCD$，则线段CD是$\triangle ABC$ 中角C 的**平分线**。假如CD线段与底边AB垂直相交，则线段CD 是$\triangle ABC$ 中底边 AB上的**高**或**顶垂线**。

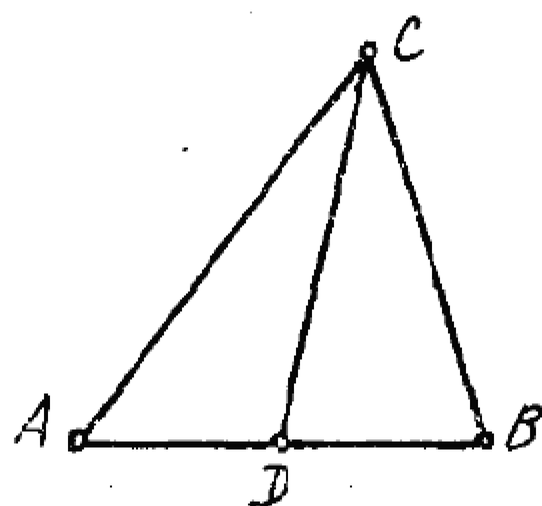


图 31

定理4.4 等腰三角形底边上的中线是顶角平分线和底边上的高。

证明 设$\triangle ABC$ 为已知的等腰三角形，AB为其三角形的底边（如图32），设CD 是$\triangle ABC$的底边 AB 上的中线。因为 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，即 $AC=BC$，根据定理 4.2 得出，$\angle CAD=\angle CBD$，因为D 点是底边上的中点，所以

$AD=BD$。又根据全等三角形第一判定法，得出$\triangle CAD\cong\triangle CBD$，即$\angle ACD=\angle BCD$，$\angle ADC=\angle BDC$．因为$\angle ACD=\angle BCD$，所以，$CD$是$\triangle ABC$中$C$角的平分线．因为$\angle ADC$与$\angle BDC$相等，且互为补角，所以，$CD$是$\triangle ABC$中底边$AB$上的高．定理得证．

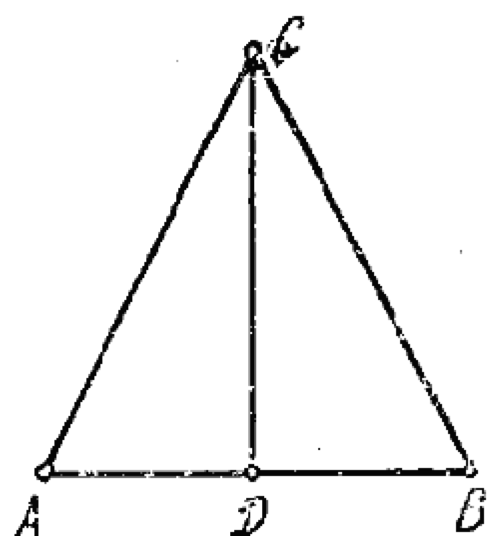


图 32

全等三角形的第三判定法

下面的定理建立起全等三角形的第三判定法：

定理4.5 三角形 ABC 与 $A_1B_1C_1$ 中，如 $AB=A_1B_1$，$AC=A_1C_1$，$BC=B_1C_1$，则 $\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$，即 $\angle A=\angle A_1$，$\angle B=\angle B_1$，$\angle C=\angle C_1$。

证明（如图33） 假如$\angle A=\angle A_1$或$\angle B=\angle B_1$，根据全等三角形的第一判定法，可得出$\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$。现在我们假设给定三角形中，$\angle A\neq\angle A_1$，$\angle B\neq\angle B_1$。以$AB$边为一边，点$A$为顶点，在顶点$C$所在的半平面内作出与$\angle A_1$相等的角，并在该角的另一边上划出与线段$A_1C_1$相等的线段$AC_2$。

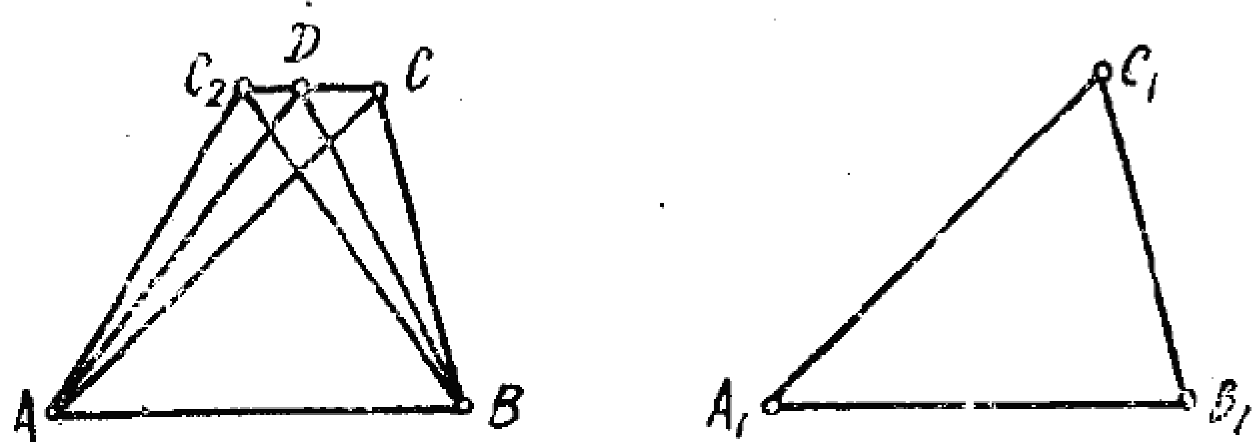


图 33

依定理的条件 $AB=A_1B_1$，依作图 $A_1C_1=AC_2$ 及

$\angle B_1A_1C_1=\angle BAC_2$，故根据全等三角形的第一判定法得知$\triangle A_1B_1C_1\cong\triangle ABC_2$，于是$BC_2=B_1C_1$。

因为$AC=A_1C_1$，而$A_1C_1=AC_2$，故$AC=AC_2$；又因为$BC=B_1C_1$，而$B_1C_1=BC_2$，故$BC=BC_2$；由此可得出$\triangle CC_2A$与$\triangle CC_2B$都是以CC_2为底边的等腰三角形。设底边的中点为D，因线段CC_2不与直线AB相交，所以D点不在直线AB上，由此可得出AD与BD是两条不同的直线。

根据定理4.4判定：AD和BD都应与直线CC_2垂直相交，然而，根据定理3.3，我们可知，过点D只能作出一条垂直于直线CC_2的直线。所得出的结论与我们的假定是矛盾的。定理得证。

复习题及练习题

1．什么样线段称为相等的线段？

2．什么样角称为相等的角？

3．何种图形称为三角形？

4．$\triangle ABC$与$\triangle PQR$全等，这表示什么意思？

5．说出全等三角形的第一判定法。

6．说出并证明全等三角形的第二判定法。

7．什么样的三角形称为等腰三角形？等腰三角形中哪两个边称为腰？哪条边称为底边？

8．试证等腰三角形的两底角相等。

9．试证有两个角相等的三角形是等腰三角形。

10．举例说明什么是逆定理？每一个定理都有其逆定理吗？

11．证明等边三角形各角都相等。

12．证明各角都相等的三角形是一个等边三角形。

13．说明什么是三角形的中线、角平分线及顶垂线。

14．证明等腰三角形底边上的中线就是底边上的高和顶点的角平分线。

15．证明全等三角形的第三判定法。

16．证明：若从角（ab）的顶点引出射线 c，且这射线 c 从角（ab）的两边之间通过，则角（ac）必然小于角（ab）。

17．举例说明在$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，若 $AB=A_1B_1$，$BC=B_1C_1$，$\angle A=\angle A_1$，则$\triangle ABC$可能与$\triangle A_1B_1C_1$不是全等三角形。

18．证明等腰三角形顶角的角平分线，就是底边上的中线和高。

19．证明等腰三角形中两腰上的中线相等；两底角的角平分线也相等。

20．证明等腰三角形三边中点是另一个等腰三角形的三顶点。

21．证明同一个三角形，假如 $\triangle ABC\cong\triangle BCA$，则该三角形为等边三角形。

§5．三角形各角及各边之间的关系

三角形各角之间的关系

定理5.1　任意三角形其两角之和必小于180°。

证明　设已知三角形为ABC(如图34)，证明角BAC与角BCA之和小于180°。设点O为AC边的中点，连结 BO，在 BO 的延长线上取一点D，使 OD等于 OB。在$\triangle AOD$与$\triangle COB$中，$\angle DOA=\angle COB$(对顶角)，

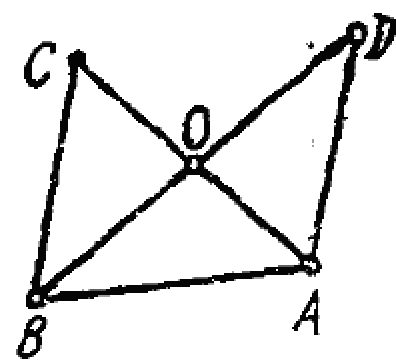


图　34

$AO=OC$（点O为AC边的中点），$OD=OB$（作图），因此$\triangle AOD\cong\triangle COB$。于是$\angle OCB=\angle OAD$。$\angle BAD=\angle BAO+\angle DAO$，这是因为射线$AO$与线段$BD$相交，而线段$BD$的两端点$B$和$D$分别位于角$BAD$的两边上。因为$\angle OAD=\angle OCB$，所以角$BAD$等于三角形$ABC$中角$BAC$与角$BCA$之和。角$BAD$不是平角，因为点$D$不在直线$AB$上，由此得出角$BAD$小于180°。而三角形$ABC$的角$BAC$与角$BCA$之和等于角$BAD$，所以这两角之和也小于180°。定理得证。

小于直角（即小于90°）的角称为**锐角**，大于90°、且小于180°的角称为**钝角**。

由定理5.1可推出：任意三角形都有两个锐角。确实如此，如果三角形中只有一个角是锐角，则另两角之和必然大于180°（即不小于180°），这与定理5.1是矛盾的。

$\triangle ABC$中，角A、B、C的补角称为三角形的**外角**，为了与外角区分开，角A、B、C称为三角形的内角。

定理5.2　三角形任一个外角都大于和它不相邻的内角。

证明　设已知三角形为ABC，让我们证明A角的外角大于内角B。根据定理5.1可得出，三角形ABC中两内角A与B之和小于180°，即$\angle A+\angle B<180°$，由此可得，$\angle B<180°-\angle A$，根据补角的性质可得知$180°-\angle A$正是$\triangle ABC$中A角的外角的度数，所以角B小于角A的外角。定理得证。

三角形的角与其对边之间的关系

定理5.3　在三角形ABC中，如AB＞BC，则∠C＞∠A，反之，如∠C＞∠A，则AB＞BC。简言之，在同一三角形内，大角对大边，大边对大角。

证明 $\triangle ABC$ 中，设 $AB>BC$（如图35）在射线 BA 上画出等于线段 BC 的线段 BC_1，点 C_1 在点 A 及 B 之间。因为射线 CC_1 与线段 AB 相交，所以射线 CC_1 从 CA 与 CB 之间通过。由此可得出，$\angle BCC_1<\angle BCA$，即 $\angle BCC_1<\angle C$。

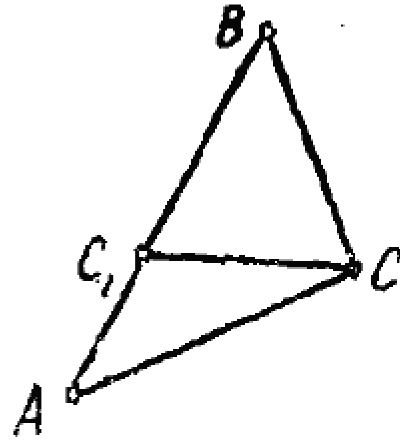


图 35

因为 $\angle BCC_1$ 与 $\angle BC_1C$ 是等腰三角形 CBC_1 的两个底角，所以 $\angle BCC_1=\angle BC_1C$。角 BC_1C 是三角形 AC_1C 中内角 C_1 的外角，因此 $\angle BC_1C>\angle A$。由上推理得出，在三角形 ABC 中 $\angle C$ 大于 $\angle A$。定理的第一个结论得证。

现在让我们来证明，如 $\angle C>\angle A$，则 $AB>BC$。假设这个结论是不正确的，那么，AB 或者等于 BC，或者 $AB<BC$。当 $AB=BC$ 时，三角形 ABC 必然是一个等腰三角形，则三角形的两个底角必然相等，即 $\angle A=\angle C$；假如 $AB<BC$，根据已证明的部分得出：$\angle A>\angle C$，这将与定理的条件恰恰相反，也就是说，如 $\angle C$ 大于 $\angle A$，则 AB 大于 BC。定理得到充分证明。

三角形各边之间的关系

定理5.4 任意三角形，其两边之和必大于第三边。

证明 已知三角形 ABC（如图36），让我们证明，$AB<AC+CB$。在射线 AC 上，取一点 D，使 $AD=AC+CB$，此时点 C 必在点 A 与点 D 之间，而 $CD=CB$。在三角 BCD 中，角 DBC 等于角 BDC，这是因为这两个角是等腰三角形的底角。

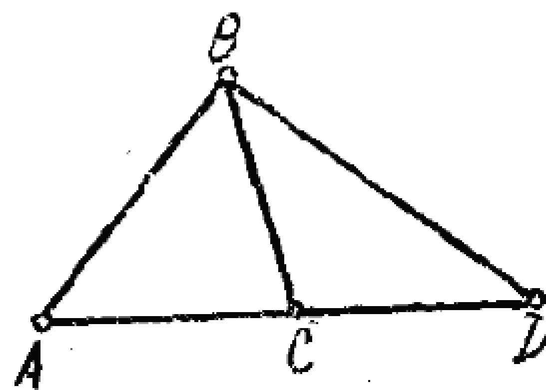


图 36

因为射线BC从BA与BD两边之间通过，所以角ABD大于角CBD，即角ABD大于角ADB。根据定理5.3可得出$AD>AB$，即$AC+BC>AB$。定理得证。

三角形不等式 如果A与B是不同的两个点，线段AB的长称为这两点之间的**距离**。假如点A与点B相重合，则这两点之间的距离为零。

下面定理所叙述的关于三点之间距离的性质称为**三角形不等式**。

定理5.5 若A、B、C为任意三点，不一定是三个不同的点，则距离AB不应大于两距离之和AC＋CB。

证明 我们可分成四种情况进行证明：1）A、B、C为三个不同的点，并且它们不在一条直线上；2）A、B、C为三个不同的点，但它们在一条直线上；3）其中有两个点相重合；4）三个点都重合在一点。

在第一种情况下，定理5.5的结论可由定理5.4推出。

现在来分析第二种情况．A、B、C是在同一条直线上的三个不同点，其中必有一个点位于其它两点之间。假如点C位于A与B之间，根据度量线段的性质，可得出，$AB=AC+CB$.假如点A位于点B与点C之间，则$BA+AC=BC$；假如点B位于点A与点C之间，则$AB+BC=AC$。由上述A、B、C三点位置的三种情况，我们得知：AB都不大于$AC+CB$。

现在来看第三种情况．A、B、C三点中有两个点相重合，假如A与B相重合，则$AB=0$，假如A与C相重合，则$AB=CB$；假如B与C重合，则$AB=AC$，由此可见：对于两点重合的任何情况，AB都不大于$AC+CB$。

第四种情况，即A、B、C三点都重合在一点，AB、

AC、BC都等于零，因此，AB不大于 $AC+CB$。定理得证。

由定理5.5可推知：设$A, C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n, B$是$n+2$个任意点，则$AB$不应大于$AC_1+C_1C_2+C_2C_3+\cdots+C_nB$。事实上，根据定理5.5可得出：$AB$不大于$AC_1+C_1B$。依据同一定理可得出：$C_1B$不大于$C_1C_2+C_2B$。因此，$AB$不大于$AC_1+C_1C_2+C_2B$。同理可见：$C_2B$不大于$C_2C_3+C_3B$。因此，$AB$不大于$AC_1+C_1C_2+C_2C_3+C_3B$，继续推理，即可得出：$AB$不大于$AC_1+C_1C_2+C_2C_3+\cdots+C_nB$。

由点A_1，A_2，$A_3, \cdots, A_n$按顺序双双两点连结的线段A_1A_2，$A_2A_3, \cdots$，$A_{n-1}A_n$，这样所组成的图形称为**折线**。点A_1, A_2，$A_3, \cdots$，A_n为折线的**顶点**，而线段A_1A_2，A_2A_3，…则为折线中的**部分线段**。各部分线段的总和则为折线的长度，图37中所绘制的就是以A_1，A_2，…，A_6为顶点的折线。

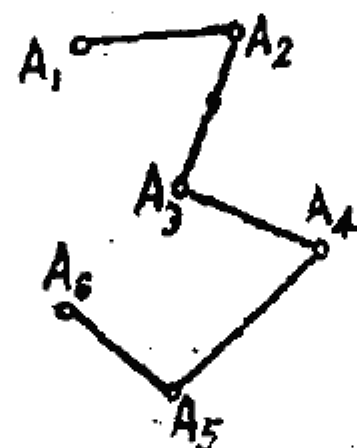


图 37

折线的长度不小于该折线两端点连成的线段的长度。

设$A_1A_2A_3\cdots A_n$是已知的一条折线，根据已证明的定理可判定：线段A_1A_n的长度不大于诸线段A_1A_2，A_2A_3，…，$A_{n-1}A_n$的长度之和，即折线之长。

复习题及练习题

1. 如何称呼三角形ABC的角？
2. 定理5.1的证明图34中的三个问题：
   1）试证角COB与角AOD为对顶角；
   2）试证角BAD等于角CAB与角CAD之和；

3）试证角BAD小于180°。

3．什么样的角称为锐角？什么样的角称为钝角？

4．证明任意三角形都有两个锐角。

5．在三角形ABC中角A的外角是什么角？

6．证明三角形外角大于和它不相邻的任意一个内角。

7．定理5.3的证明图35中的三个问题：

1）为什么说点C_1位于点A与B之间？

2）为什么说三角形ACC_1中角AC_1C的外角是角BC_1C？

3）为什么说角BCC_1小于角BCA？

8．证明任意三角形两边之和必大于第三边。

9．A、B两点之间的距离是什么？

10．三角形不等式的内容是什么？试证三角形不等式。

11．什么样的图形称为折线？证明折线的长度不小于该折线两端点之间的距离。

12．三角形中是否可有两个直角？

13．证明任意三角形必有两个外角是钝角。

14．证明垂直于第三条直线的两条直线不可能相交。

15．在$\triangle ABC$的AB边上取一点D。证明线段CD至少小于AC和BC中的一个边。

16．证明两端点在三角形两边上的线段，必不大于该三角形中最大的边。

17．假如$AB=7cm$、$BC=10cm$、$AC=18cm$，是否能构成三角形ABC？并说明答案的理由。

18．假如$AB=BC+AC$，证明A、B、C三点位于同一条直线上。

19．请看图34，其中BO为三角形ABC中AC边上的中线，证明中线BO小于$\frac{1}{2}(BA+BC)$。

20. 假如折线的各个顶点不在同一条直线上，证明折线的长度应大于折线两端连成的线段。

21. 证明封闭折线中任意两顶点之间的距离都小于该折线长度的$\frac{1}{2}$。

§6. 直角三角形

直角三角形的角和边 有一个角是直角的三角形称为**直角三角形**。任意三角形都必须有两个锐角，所以**直角三角形只能有一个角是直角**。直角三角形另外两个角都是锐角。

直角三角形中的三条边都有专称。直角所对的边称为**斜边**，另外两条边称为**直角边**，直角边所对的角都是锐角。

在任意三角形内，大角对大边（定理5.3），因此，**直角三角形中斜边必大于任意直角边**。又因任意三角形中两边之和必大于第三条边，所以**直角三角形中两条直角边之和必大于斜边**。

全等的直角三角形 除我们所熟悉的全等三角形判定法之外，还可利用直角三角形全等判定法证明全等的直角三角形。直角三角形全等判定法如下：

定理6.1 在直角三角形ABC和$A_1B_1C_1$中，∠C和$\angle C_1$为直角，如果具有下列一组条件，则△ABC全等于$\triangle A_1B_1C_1$：

1）$BC=B_1C_1$， $\angle A=\angle A_1$；

2）$AB=A_1B_1$， $BC=B_1C_1$；

3）$AB=A_1B_1$， $\angle A=\angle A_1$。

证明（如图38） 首先让我们分析条件1）或条件2）成立时的情况。在这些条件下，假如$AC=A_1C_1$，且条件1）成立，则根据全等三角形第一判定法可断定$\triangle ABC\cong$

$\triangle A_1B_1C_1$；当条件2）成立时，则可根据全等三角形第三判定法得出$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$。

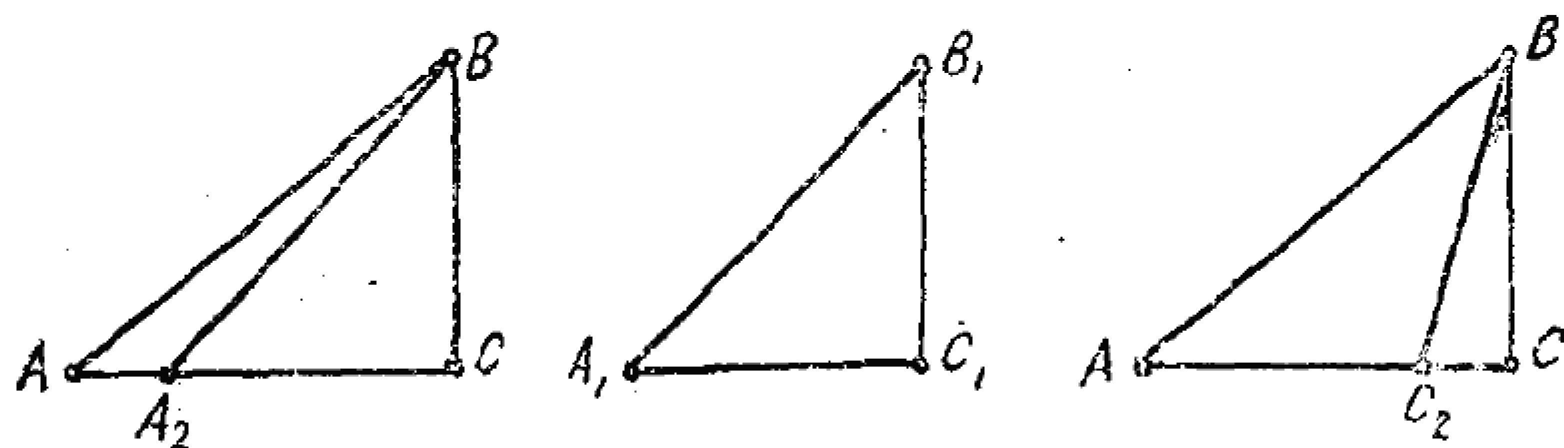


图 38

假设$AC \neq A_1C_1$，例如，$A_1C_1 < AC$.在CA边上截取线段CA_2，使$CA_2 = C_1A_1$（如图38左图）.A_2点位于A和C之间，$\angle C_1$和$\angle C$均为直角，$BC = B_1C_1$（条件给出），$A_1C_1 = A_2C$（作图）按全等三角形第一判定法可得出：$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2BC$，所以$\angle BA_2C = \angle B_1A_1C_1$，$BA_2 = B_1A_1$。

当条件1）成立时，$\angle BA_2C$和$\angle B_1A_1C_1$不可能相等。实际上$\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$，如果$\angle BA_2C = \angle B_1A_1C_1$，则$\triangle ABA_2$中的外角$\angle BA_2C$便等于它的不相邻的内角$\angle BAC$。这便与三角形外角的定理相矛盾。

当条件2）成立时，BA_2不可能与B_1A_1相等，实际上$B_1A_1 = BA$。假如$B_1A_1 = BA_2$则$\triangle ABA_2$必然是一个等腰三角形。等腰三角形ABA_2底角$\angle BA_2A$是一个钝角，这是因为它与直角三角形BCA_2中一锐角互为补角。由此可得出，$\angle BAA_2$也是一个钝角，这显然是不可能的。

因此，当条件1）或2）其中有一组条件成立时，AC与A_1C_1必然相等。因此，我们便证明出$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$。

当条件3）成立时，$AB = A_1B_1$，$\angle A = \angle A_1$，假设$AC =$

A_1C_1，则根据全等三角形第一判定法，可得出：$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$。

假设$AC \neq A_1C_1$，例如，$AC > A_1C_1$，在直角边AC上截取$AC_2 = AC$（请看图38—右图），根据全等三角形第一判定法，可得出：$\triangle ABC_2 \cong \triangle A_1B_1C_1$。由此，$\angle AC_2B = \angle C_1$，$\angle AC_2B$为一直角，则$\angle CC_2B$也是一个直角，这是因为$\angle AC_2B$与$\angle CC_2B$互为补角，这样在$\triangle CBC_2$中便出现两个直角，这显然是不可能的。

当条件3）成立时，AC必然等于A_1C_1，因此，由上述所证，可得出：$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$。定理得证。

垂线和斜线 设a为一条直线，B为直线a外的任意点，而点A为直线a上的一点。当直线a与线段AB相垂直时，则线段AB称为从点B引向直线a的**垂线**（如图39），点A称为**垂足**。

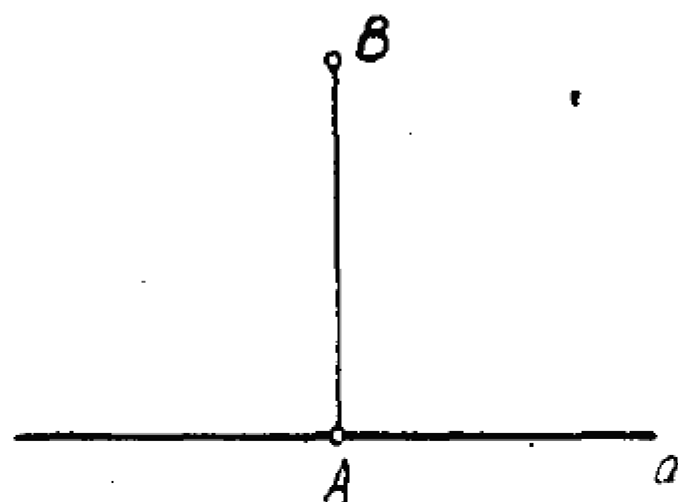


图 39

定理6.2 从已知直线外一点向这条直线可引出一条垂线，而且只能引出一条垂线。

证明 设已知直线为a，B为直线a外的一点（如图40），在直线a上，任意取两点C、D。假如线段BC垂直于直线a，则线段BC就是从点B向直线a引出的垂线。

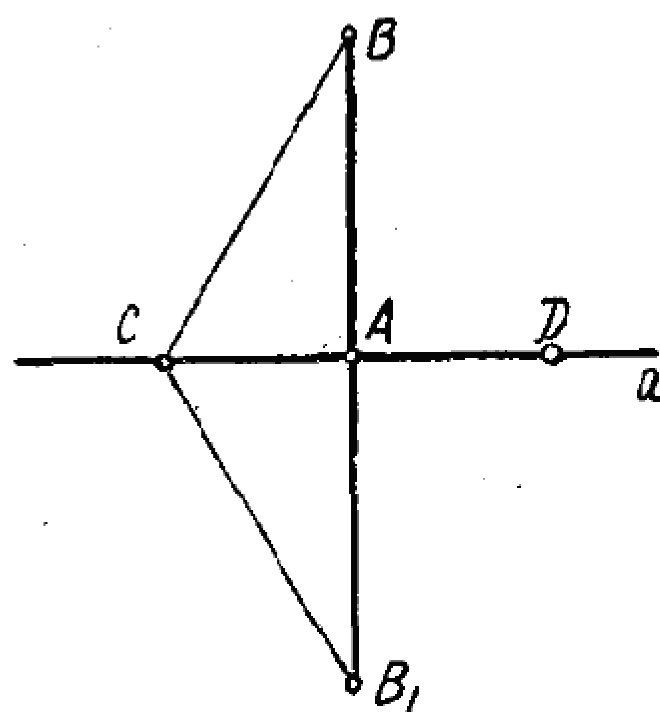


图 40

设 BC 不是从点 B 向直线 a 引出的垂线。直线 a 将平面分隔成两个半平面，点 B 在其中一个半平面内。在另一半平面内，以射线 CD 为一边，并以 C 为顶点作一角，使其等于角 BCD，在该角的边上截取等于线段 CB 的线段 CB_1。

点 B、B_1 位于直线 a 所分隔的不同半平面内，因而线段 BB_1 与直线 a 必相交于某一点 A。在 $\triangle CAB$ 与 $\triangle CAB_1$ 中，AC 为公共边，$\angle BCA=\angle B_1CA$，$CB=CB_1$，根据全等三角形第一判定法可得出，$\triangle BCA\cong\triangle B_1CA$。由此得出：在这两个三角形中 $\angle BAC=\angle B_1AC$，又 $\angle BAC$ 与 $\angle B_1AC$ 互补，所以这两个角都是直角。因此，直线 BA 垂直于直线 a，即线段 AB 是从 B 点向直线 a 引出的垂线。

现在假设：从点 B 向直线 a 可以引出两条垂线，即 BA 和 BA_1；则在三角形 BAA_1 内，将有两直角，即 $\angle A$ 和 $\angle A_1$。然而，这是不可能的。因此，从点 B 向直线 a 可引出一条垂线，而且只能引出一条垂线。定理得证。

设 BA 为从 B 点向直线 a 引出的垂线，C 为直线 a 上任意点，且点 C 与点 A 是不同的两点。线段 BC 称为从 B 点向直线 a 引出的**斜线**（如图41），点 C 为斜线的**底点**，线段 AC 称为斜线的**投影**。从以角 A 为直角的直角三角形 BAC 中，可以看出：**斜线大于垂线**。在这三角形中斜边称为**弦**，长的直角边称为**股**，而短的直角边则称为**勾**。

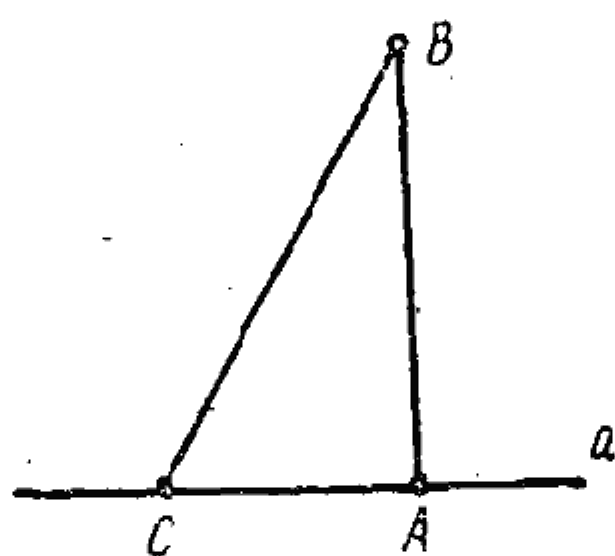


图 41

从 B 点向直线 a 所引出的垂线之长，即是从 B 点到直线 a 的距离。由于垂线比自同一点所引的斜线为短，**所以由B点**

到直线 a 的距离不大于从 B 点向直线 a 上任意点所引出的线段的长度。

复习题及练习题

1. 什么样的三角形称为直角三角形？
2. 证明直角三角形只能有一个直角。
3. 直角三角形内，哪一条边称为斜边？哪些边称为直角边？
4. 证明直角三角形斜边大于任何一条直角边。
5. 证明直角三角形两条直角边之和大于斜边。
6. 说出全等三角形的第一、第二、第三判定法。
7. 说出并证明全等直角三角形的判定法。
8. 说明什么是垂线。
9. 证明从已知直线外的一个已知点可向这条直线引出一条垂线，且只能引出一条。
10. 说明什么是斜线，什么是斜线的投影。
11. 从同一点向已知直线引出垂线和斜线，证明垂线最短。
12. 什么是从 B 点到直线 a 的距离？证明它不大于从 B 点到直线 a 上其它任意点的线段长度。
13. 证明：从同一点向已知直线引出的相等的斜线，其投影相等。反之，假如斜线的投影相等，则斜线也相等。
14. 证明等腰三角形底边上的高既是其中线，又是顶角的角平分线。
15. 过三角形ABC的顶点A引出一条与 BC 边相交的直线，使顶点 B 和 C 到这条直线的距离相等，试问这条直线如何引出？
16. 三角形两条角平分线相交于一点，试证这个交点到三角

形三边的距离相等。

17. 证明三角形三条角平分线相交于一点。

18. 从B点向直线a引出一条斜线BC，试证从B点向直线a还可引出一条与BC等长的斜线BD。

19. 证明：从一已知点向已知的直线不可能引出三条相等的斜线。

20. 从B点向直线a引垂线BA，并引两条斜线BC、BD，如果点D位于点A与点C之间，则$\angle BDC$是一钝角。

21. 证明：从同一点向已知直线所引出的两条斜线，投影较长的斜线大于投影较短的斜线；反过来说，较长斜线的投影大于较短斜线的投影。

§7. 几 何 作 图

作图题　作图题就是使用给定的制图仪器绘制几何图形。直尺和圆规是最常用的制图仪器。解作图题不仅要作出图形，而且要说明如何作法，并给以相应的证明。

直尺是作几何图形的工具，使用直尺可以作任意直线。即：可以作过一个已知点的任意直线，也可以作过两个已知点的直线，除此之外，不能用直尺完成任何其它作图任务。尤其是不能用带刻度的直尺截取线段。

圆规也是作几何图的工具，使用圆规以已知点为圆心，以给定的长度为半径，作一个圆；也可以在已知直线上从已知点截取给定的线段。

现在让我们来研究最简单的作图题。

已知三边求作三角形

例题7.1　已知三边 a、b、c（如图42—左）求作一三角形。

解：　用直尺画出任意一条直线，并在其上标出点B（如图42—右），用圆规量出线段a的长度，以B点为圆心，以a之长度为半径画一圆弧，该圆弧与直线的交点为C，$CB=a$，再用圆规量出线段c的长度，以B点为圆心，以c之长度为半径画一圆弧，然后用圆规量出线段b的长度，再以点C为圆心画一圆弧，这两个圆弧的交点为A，连结CA和AB，得出$\triangle ABC$就是所要作的三角形。由作图得知：$CB=a$，$CA=b$，$AB=c$。

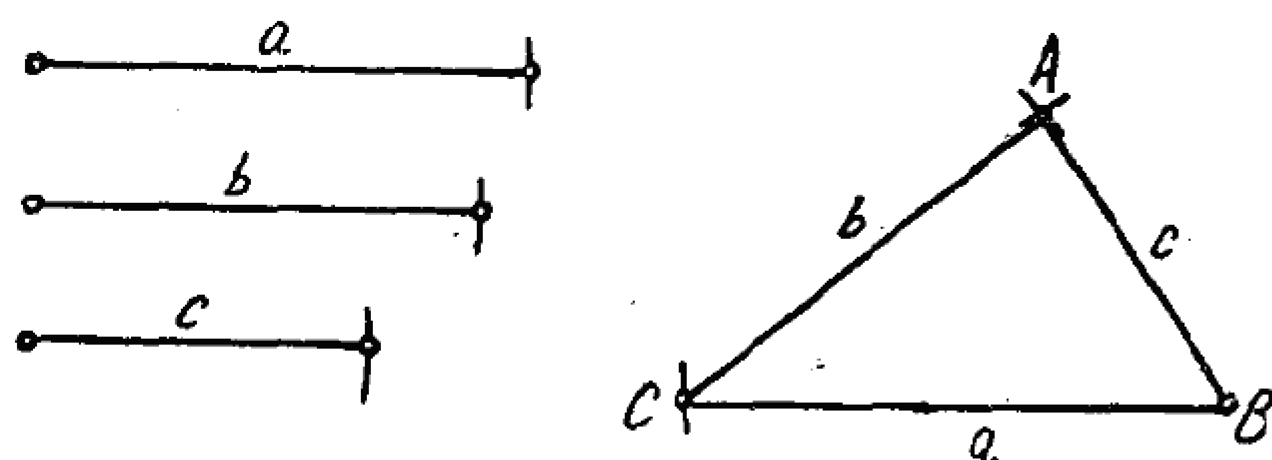


图　42

例题7.1不一定总有解。根据定理5.4，线段a、b、c必须满足下面的条件：$a+b>c$，$b+c>a$，$c+a>b$，否则作不出三角形。

作一个角使它等于一个已知角

例题7.2　在给定的半平面内，从已知的射线上作一个角使它等于一个已知角。

解：以已知角的顶点A为圆心，画任意一个圆弧（如图43—左），设圆弧与角的两边交点为B和C。以给定的射线端点O为圆心，以AB为半径画一圆弧，圆弧与所给射线的交点为B_1（如图43—右）；再以B_1为圆心，以BC为半径作一圆弧，在给定的半平面内，两圆弧相交于C_1，连结OC_1即得出所作角的另一边。只要指出在$\triangle ABC$与$\triangle OB_1C_1$中对应

边相等，则$\triangle ABC \cong \triangle OB_1C_1$，$\angle A$与$\angle O$是全等三角形的对应角，所以$\angle A = \angle O$。

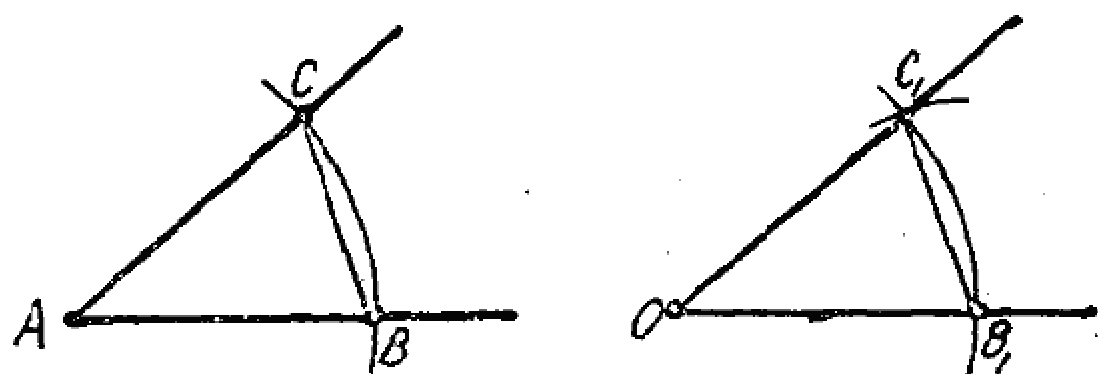


图 43

作角的平分线

例题7.3　作一个已知角的平分线.

解：以已知角的顶点A为圆心，以任意长度为半径，画一圆弧（如图44），圆弧与已知角两边的交点为B和C；再以点B和点C为圆心，以相等的半径作两个圆弧，两圆弧的交点为D，连结AD，射线AD将角A平分为两个相等的角。理由是：

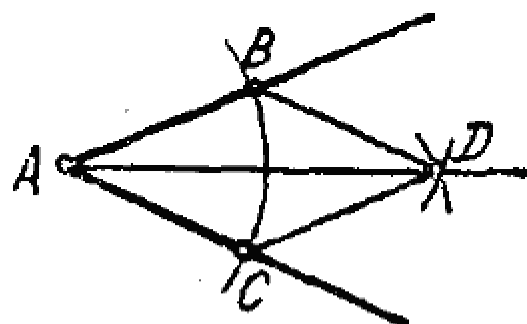


图 44

三角形ABD与三角形ACD全等，而$\angle BAD$与$\angle CAD$是全等三角形的对应角，所以$\angle BAD = \angle CAD$。

平分线段

题例7.4　平分一条已知的线段.

解：设AB为一条已知的线段(如图45)，以点A和点B为圆心，以AB为半径分别画圆弧，得到两个交点为C和C_1，这两个交点在直线AB所分隔的两个不同的半平面内。线段CC_1与直线AB必相交于O点，这点O就

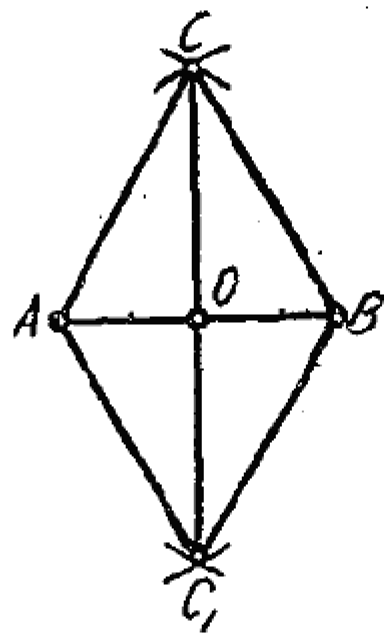


图 45

是AB线段的中点。

显然，根据全等三角形第三判定法，可断定$\triangle CAC_1 \cong \triangle CBC_1$，由此可得：$\angle ACO=\angle BCO$。根据全等三角形第一判定法，又可得出$\triangle ACO \cong \triangle BCO$，$AO$与$BO$是全等三角形的对应边，因而相等。由此即可得出，$O$是线段$AB$的中点。

作垂线

例题7.5 从已知一点O，向给定直线a作一垂线。

解：可能有两种情况：

1）点O在直线a上；

2）点O不在直线a上。

首先看第一种情形（如图46—左），

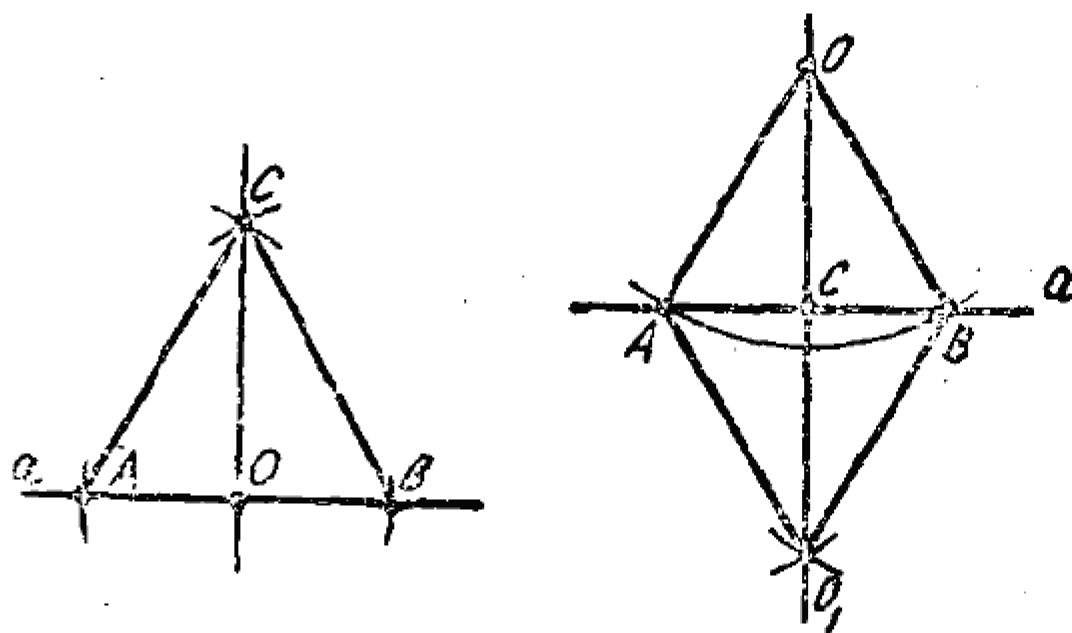


图 46

以O为圆心，以任意长度为半径画圆弧。这圆弧与直线a交于两点A和B，再以A、B两点为圆心，以AB线段长为半径分别画弧，得交点C，连结O、C两点的直线，就是所要作的垂线。直线OC与AB垂直可由$\angle COA=\angle COB$推出，此两角相等可由$\triangle ACO \cong \triangle BCO$得知，而这两三角形全等可根据全等三角形第三判定法断定。

现在来分析第二种情形（如图46—右）。以O点为圆心，以适当长度为半径画一圆弧，这圆弧与直线a交于两点A与B，再以A点和B点为圆心，以相同长度为半径分别画二圆弧，得交点O和O_1，连结O与O_1两点的直线就是所求作的垂线。请读者自己证明这种作图法是否正确。

点的轨迹 轨迹方法是解作图题的一种方法。具有某种条件的所有点组成的图形，称为具有这种条件的点的轨迹。例如，圆的定义，圆是到一个定点的距离等于定长的点的轨迹，这个定点称为**圆心**，而圆周上的点与圆心之间的距离称为圆的**半径**。

下面的定理给出一个重要的点的轨迹：

定理7.6 到A、B两点等距离的点的轨迹是一条直线，这条直线垂直于线段AB，并经过AB的中点O（图47）。称这条直线为AB的垂直平分线。

证明 先证线段AB的垂直平分线上的任意点C必与A及B两点等距离，即$AC=BC$。在$\triangle AOC$与$\triangle BOC$中，OC为公共边，$\angle COA=\angle COB=90°$，$AO=OB$（$O$点是线段$AB$的中点），所以$\triangle AOC\cong\triangle BOC$，$AC=BC$。然后证明另一半平面内到$A$、$B$两点等距离的点$D$，必位于线段$AB$的垂直平分线$OC$上。

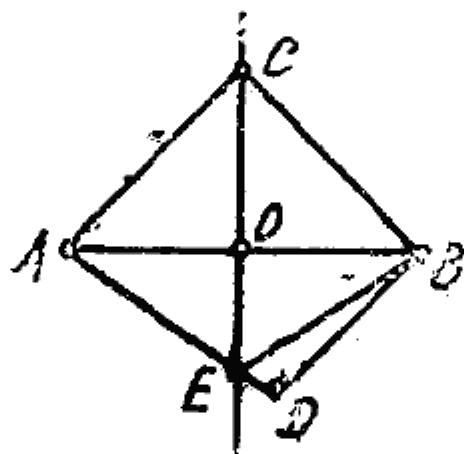


图 47

假设D点不在直线OC上，对直线OC而言，A、B两点在不同的两个半平面内。为了更精确地论证，可假设D点位于B点所在的半平面内（如图47所示），线段AD与直线OC交于某一点E，由此得出，$AE=BE$。假设：$AD=BD$，由上述两个等式可推导出，在$\triangle BDE$中，$DB=BE+ED$。然而，这不可能

成立，因为三角形的任意两边之和必大于第三边。

轨迹方法 下面叙述用轨迹方法解作图题。我们在解作图题时，必须作出满足两个条件〔即满足条件1)和条件2)〕的某一点X，满足条件1)的点的轨迹为图形F_1，而满足条件2)的点的轨迹为图形F_2。求作的X点既位于图形F_1上，又位于图形F_2上，这就是说点X是F_1与F_2的交点。

例题7.7 求作已知三角形ABC的外接圆。

解：（如图48）三角形外接圆的圆心O应与三角形三个顶点等距。这就是说，圆心O必满足如下两个条件：1）圆心与三角形顶点A、C等距；2）圆心与三角形顶点B、C等距。满足条件1）的点的轨迹是过AC边的中点D的垂线（即AC边上的中垂线）。满足条件2）的点的轨迹是过BC边的中点E的垂线（即BC边上的中垂线）。因此，$\triangle ABC$外接圆的圆心O就是这两条中垂线的交点。

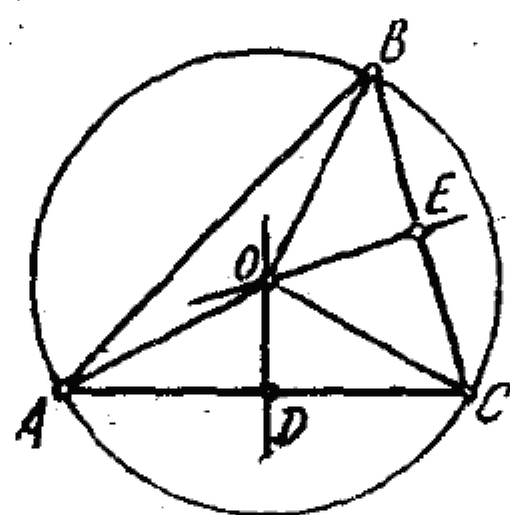


图 48

根据这个解法可以得出一条重要的结论，因为三角形外接圆心O与A、B两点等距离，所以根据定理7.6得出，外接圆的圆心O必在AB边的中垂线上。由此可得出：**三角形三边上的三条中垂线必相交于一点，这个交点就是三角形外接圆的圆心。**

运用轨迹方法解作图题，不一定都象解例题7.7那么简单，现在分析一道比较复杂的例题。

例题7.8 已知直线a，点A是直线a上的一点，点B是直线a外的一点（如图49），**在直线a上取一点X，使AX+BX等于已知线段m。**

解 必须使点X满足下面两个条件：1）点X在直线a上；2）$AX+XB=m$。满足第一个条件的轨迹就是直线a的本身，但是满足第二个条件的轨迹相当复杂，满足第二个条件的轨迹既不是直线也不是圆，而是一个点。只提出确定点X的两个条件是不行的，还应指出其中每个条件都决定着由直线或圆所组成的简单轨迹，找出这种轨迹的条件是解这道例题的关键。

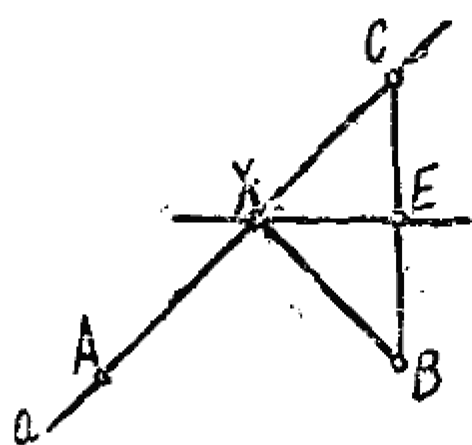


图 49

现在让我们研究，如何求出解这道例题的条件。首先，假设本题已得解，在射线AX上画出线段AC，使$AC=m$，当$XC=XB$时，即点X与C、B两点等距。现在我们可以写出确定点X的两个条件：1）点X在线段AC上；2）点X与B、C两点等距。第一条轨迹是线段AC，第二条轨迹是过BC中点且与BC垂直的直线（即BC线段的中垂线），这两条轨迹的交点就是点X。

复习题及练习题

1. 试说明，如何根据已知三条边求作三角形？在何种条件下此题无解，即在何种条件下不存在已知三边的三角形？
2. 试说明，如何在给定的半平面内从已知的射线上作一个等于已知角的角。
3. 试说明，如何作一个已知角的平分线。
4. 试说明，如何平分一条线段。

5. 试说明，如何从一个已知点向给定的直线作垂线。
6. 什么是轨迹？
7. 到两点距离相等的点的轨迹是何种图形？
8. 试说明解作图题的轨迹方法，并举例说明。
9. 求作一条等于两条不相等的已知线段之和的线段。
10. 求作一个等于两个不相等的已知角之和的角。
11. 求作一条等于已知线段$\frac{1}{4}$的线段。
12. 求作一个等于 已 知 角 $\frac{1}{4}$的角。
13. 按下列条件求作三角形：
    1）已知$\angle A$和两条边AB、AC；
    2）已知$\angle A$和两条边AB、BC；
    3）已知两角$\angle A$、$\angle B$和一边AB。
14. 已知两条边AB、BC和AB或BC边上的一条中线，求作三角形。
15. 已知两条边AB、BC和BC边上的高，求作三角形。
16. 求作一点与A和B两点等距离，并与C点具有已知的距离。
17. 试证明与两条相交直线等距的点的轨迹就是这两条直线相交后所形成的四个角的平分线。
18. 已知三角形ABC，求作与AB、BC、AC三边等距的点。
19. 求作一点，使这点与两条已知直线等距离，并与一个已知点具有给定的距离。

§8. 平 行 线

平行线的判定

定理8.1　如直线c与直线a和b平行，则直线a与直

线 b 平行.

证明 假设直线 a 与直线 b 不平行，此时两条直线相交于某点 C，因此，过 C 点可作两条与直线 c 平行的线，根据公理Ⅵ，这是不可能的。按照公理Ⅵ，过已知直线外一点可作出一条，而且只能作一条与已知直线平行的直线。定理得证。

由定理8.1可推论出：**如果一条直线与两条平行线中一条相交，则这条直线也必与两平行线中另一条相交。**

设 AB、CD 为两条直线，AC 为第三条与 AB 和 CD 相交的直线（如图50），直线 AC 对 AB 和 CD 来说叫**截线**。截线 AC 与直线 AB 及 CD 相交所成之角都有专称。如果点 B、D 对直线 AC 而言，在同一半平面内，则 $\angle BAC$ 与 $\angle DCA$ 称为**同旁内角**（如图50—左）；如果点 B、D 对 AC 而言，在不同半平面时，则 $\angle BAC$ 与 $\angle DCA$ 称为**内错角**（如图50—右）。

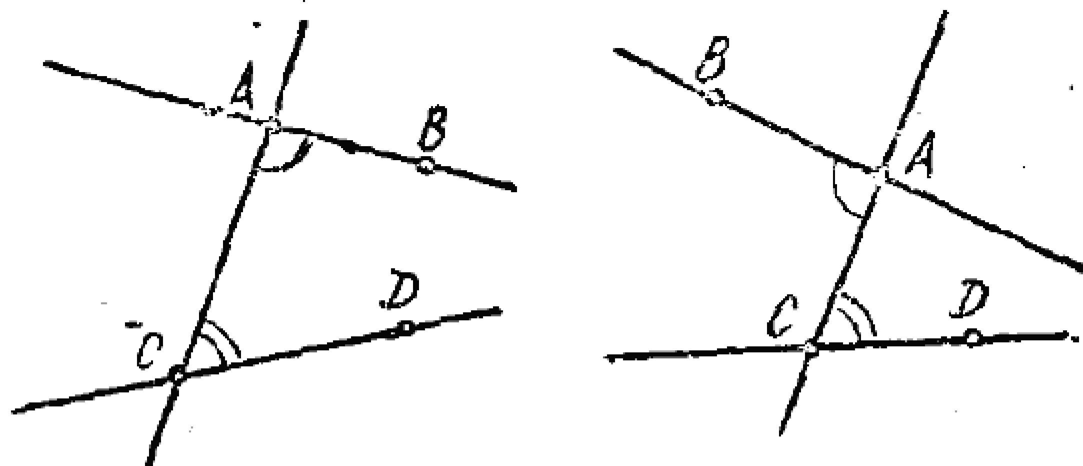


图 50

截线 AC 与直线 AB 和 CD 有两对同旁内角和两对内错角。根据补角的性质得出：假如其中有一对内错角相等，则另一对内错角也相等，而且每对同旁内角之和都等于 180°，相反，假如其中一对同旁内角之和等于180°，则另一对同旁内角之和也等于180°，而且每对内错角都相等。

定理8.2 设 a、b 为两条直线，c 为这两条直线的截

线．假如直线 a 与直线 b 平行，则内错角相等，而且同旁内角之和等于180°．反之，假如内错角相等，或同旁内角之和等于180°，则直线 a 、b 平行．

证明 我们先证定理的第二部分．假设直线 a 和 b 不平行，因此必相交于某一点 C（如图51）．我们来看三角形 ABC，根据定理5.1得知：$\angle CAB+\angle CBA$应小于180°，然而，定理的条件给出：$\angle CAB$ 与$\angle CBA$ 是同旁内角，而且两角之和等于180°，这与定理的条件是矛盾的．定理的第二部分得证．

现在来证明定理的第一部分．设直线 a 和 b 互相平行，过 A 点作一条直线a_1，使截线 c 与直线 b 和a_1所成的同旁内角之和等于180°（如图52），因此，根据已证过的部分，可得出直线 a_1 与直线 b 平行．然而，过 A 点只能引出一条与直线 b 平行的直线，所以直线 a 必与直线 a_1 相重合．截线 c 与直线 a 和 b 所成的同旁内角之和等于180°，即其内错角也相等．定理得证．

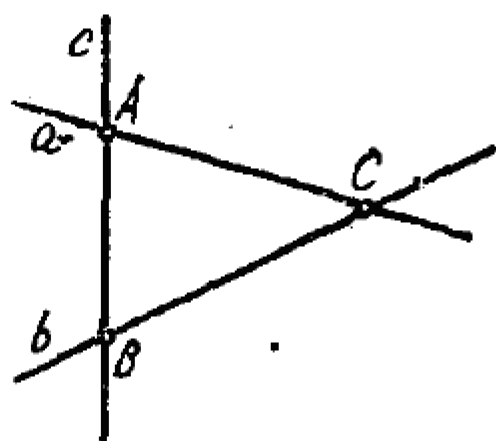


图 51

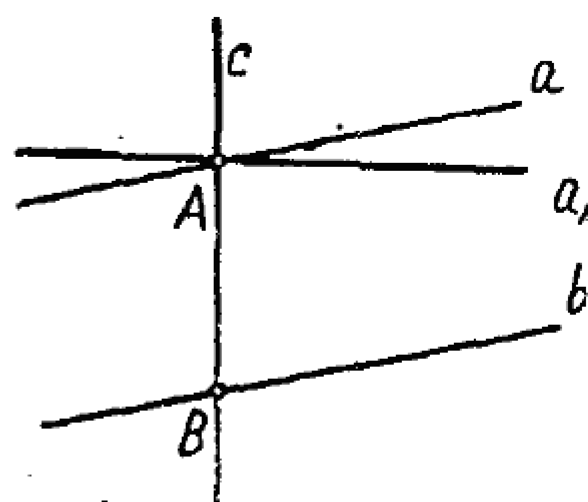


图 52

由定理 8.2 推理得出：**两条直线都与第三条直线平行，则这两条直线平行．如果一条直线与两条平行直线中一条直线平行，则这条直线必与两平行线中另一条直线平行．**

三角形内角之和

定理8.3 三角形三个内角之和等于180°。

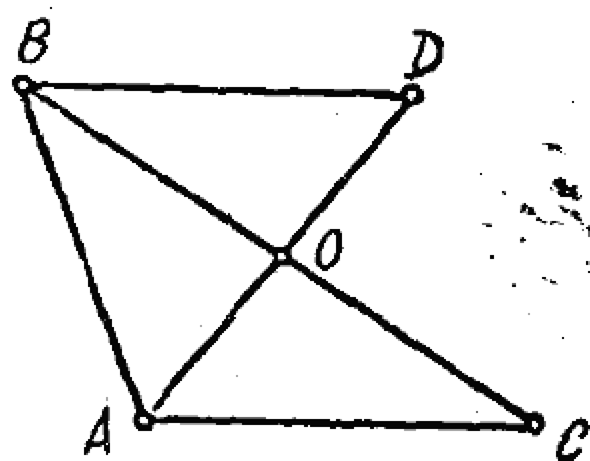


图 53

证明 设$\triangle ABC$为已知三角形，在BC边取中点O，在射线AO的延长线上，截取一点D，使线段OD等于线段OA。在$\triangle BOD$与$\triangle COA$中，$OA=OD$，$OB=OC$，$\angle BOD=\angle AOC$（对顶角），所以$\triangle BOD\cong\triangle AOC$。由此可得出：$\angle DBO=\angle ACO$。

直线AC和BD被第三条直线BC所截，$\angle DBO$与$\angle ACO$互为内错角，如图所示，线段AD与直线BC交于O点，因而A、D两点对直线BC而言，在不同的半平面内，$\angle DBO$与$\angle ACO$是相等的内错角，根据定理8.2可得出：直线AC与BD平行。

直线AC和BD被第三条直线AB所截，$\angle DBA$与$\angle CAB$是同旁内角，如图所示，C和D两点对直线AB而言，位于同一半平面内，即点O所在的半平面内，又因为直线AC和BD平行，所以$\angle CAB+\angle DBA=180°$（同旁内角互补）。因为射线$BC$从$\angle ABD$两条边之间通过，并且射线$BC$与两端点分别位于$\angle ABD$两条边上的线段$AD$相交，所以$\angle DBA=\angle DBC+\angle ABC$。已证明$\angle DBC=\angle ACB$，故$\angle DBA=\angle ACB+\angle ABC$，又已证明$\angle CAB+\angle DBA=180°$，故$\angle CAB+\angle ABC+\angle ACB=180°$。定理得证。

直角三角形有一个角是直角，而另外两角都是锐角。根据定理8.3可推知：**直角三角形两锐角互为余角**（即两个锐角之和等于90°）。

定理8.4　三角形任一个外角等于两个不相邻的内角之和。

证明　$\triangle ABC$ 为一个已知的三角形。根据定理8.3可知：$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，由此可得出：$\angle A+\angle B=180°-\angle C$，等式的右边恰好等于三角形顶点 C 处的外角度数。定理得证。

平行线间的距离处处相等

定理8.5　两条平行线间的距离处处相等，即一条直线上所有各点到另一条直线的距离都相等。

证明　设 a 和 b 为两条已知的平行直线(如图54)。在直线 a 上取任意两点 A 和 A_1，并从这两点向直线 b 各引一条垂线 AB和A_1B_1，直线AB和A_1B_1都垂直于直线 b，所以也垂直于直线 b 的平行直线 a。

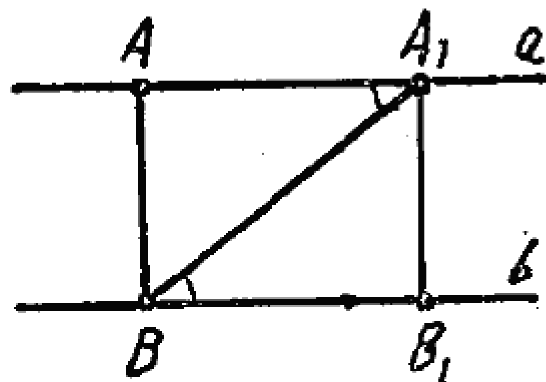


图　54

对平行线 a、b 的截线A_1B而言，$\angle BA_1A$和$\angle A_1BB_1$不是同旁内角，便是内错角。因为 $\angle BA_1A$ 和 $\angle A_1BB_1$ 都是锐角，所以两角之和必小于180°，因而，这两个角不可能是两平行线的同旁内角，这两个角必是两条平行线的内错角，所以$\angle BA_1A=\angle A_1BB_1$。

在直角三角形 BAA_1 与 A_1B_1B 中，其斜边A_1B是公共边，$\angle BA_1A$ 与 $\angle A_1BB_1$ 是相等的两个锐角（前面已证明过)，因此$\triangle BAA_1\cong\triangle A_1B_1B$，由此可得出：$AB=A_1B_1$，这就是说，从直线 a 上 A 和 A_1 两点，向直线 b 所引出的两条垂直线段相等。定理得证。

例题8.6　在直线a所分隔的同一半平面内，求与直线

a **等距离的点的轨迹。**

解： 取轨迹上任意一点A，并过A点作一条与直线a平行的直线 a_1（如图55）。

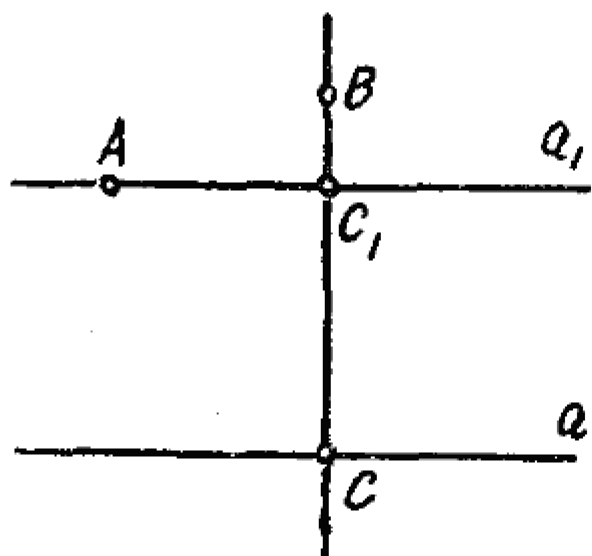


图 55

现在我们来证明所求的各点都在直线a_1上。

设点B为轨迹上的任意一点，过B点作一条垂直于直线a的直线，这条直线与直线a交于某一点C，与直线a_1交于某一点C_1。因为点C不能分隔点C_1和点B，根据$C_1C=BC$，可得出点B与点C_1必重合于一点，即点B在直线a_1上。

因此，**在直线 a 所分隔的同一半平面内，与直线 a 等距离点的轨迹是一条与直线 a 平行的直线。**

例题8.7　过点 B 作一条与直线 a 平行的直线。

解： 过点B作一条垂直于直线a的直线b（如例题7.5），然后，再过点B作一条垂直于直线b的直线c，直线c与直线b必平行。

复习题及练习题

1. 两条什么样的直线称为平行线？
2. 说出平行线的公理。
3. 证明定理8.1：如果直线a与直线b和c平行，则直线b与直线c平行。
4. 证明：如果一条直线与两条平行直线中一条直线相交，则这条直线也必与两平行线中另一条直线相交。

5. 两个什么样的角称为同旁内角？两个什么样的角称为内错角？

6. 设 ABC 为一个三角形，B_1 为三角形 AB 边上的一点，C_1 为 AC 边上的一点，直线 AB、AC 为 B_1C_1 所截，哪些角为同旁内角？哪些角为内错角？

7. 证明：如果一对内错角相等，则另一对内错角也相等，而且每对同旁内角之和都等于180°；相反，如果一对同旁内角之和等于180°，则另一对同旁内角之和也等于180°，而且每对内错角也必相等。

8. 证明：两条平行线被第三条直线所截，同位角相等，内错角相等，同旁内角之和等于180°。

9. 证明三角形三个内角之和（定理8.3）中的几个问题(图53)：

   1) 直线 AC 和 BD 被直线 BC 所截，为什么说 $\angle CBD$ 与 $\angle BCA$ 是内错角？

   2) 直线 AC 和 BD 被直线 AB 所截，为什么说 $\angle ABD$ 与 $\angle BAC$ 是同旁内角？

   3) 为什么说 $\angle ABD$ 等于 $\angle ABC$ 与 $\angle DBC$ 之和？

10. 证明三角形任一外角等于两个不相邻的内角之和。

11. 直角三角形中两个锐角之和等于多少度？

12. 等边三角形的三个角都等于多少度？

13. 证明两条平行直线间的距离处处相等。

14. 设 a 和 b 为两条平行的直线，证明：对直线 a 而言，直线 b 在同一半平面内。

15. 如果等腰三角形的顶角为57°，试问：这个等腰三角形中底边和腰哪个大？

16. 三角形三个角之比为1：2：3，试问三个角各为多少

度？

17．等腰直角三角形各角都等于多少度？

18．证明：直角三角形中，如果一个锐角等于30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半。

19．已知三角形 ABC，如何过 A 点引出一条不与 BC 边相交、但与 B、C 两点等距的直线？

20．设 ABC 为一等腰三角形，AB 为底边，AC 与 BC 为两腰，如在底边 AB 上任取一点 X，证明点 X 到 AC 和 BC 两腰的距离之和等于一个常数。

§9．四 边 形

凸四边形 设有四点 A、B、C、D，其中任何三点均不在一条直线上，则由此四点及四条线段 AB、BC、CD、AD 组成的图形叫**四边形**（图56）。点 A、B、C、D 称为四边形的**顶点**，顶点 A 与 C，B 与 D 称为两组**相对顶点**，线段 AB 与 CD，BC 与 AD 称为四边形的两组**对边**。

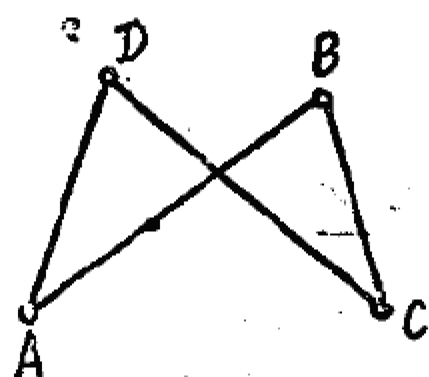


图 56

四边形，如果它对其任一边的直线而言，都在同一半平面内，则称为**凸四边形**（如图57），连结相对顶点的线段称为四边形的**对角线**。

定理9.1 凸四边形的对角线必相交。

证明 设 $ABCD$ 为已知的凸四边形（如图57），由于 $ABCD$ 是一个凸四边形，所以点 B 和 C，对直线 AD 而言，都在同一半平

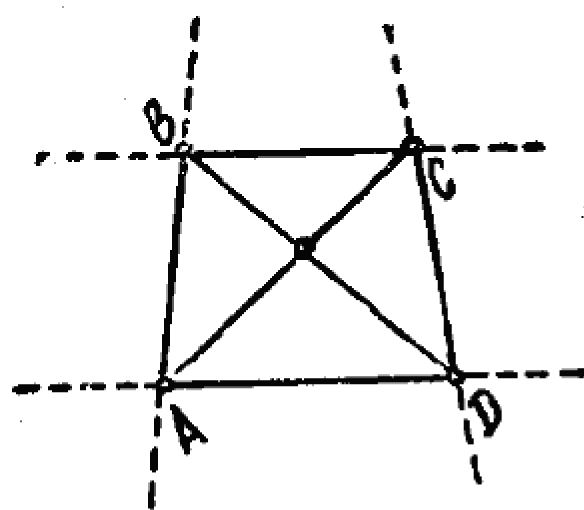


图 57

面内，射线 AC 和 AB，对直线 AD 而言，在同一半平面内。

根据定理2.2可得出：或射线 AC 从 $\angle BAD$ 的两边之间通过，或射线 AB 从 $\angle CAD$ 的两边之间通过。但是射线 AB 不可能从 $\angle CAD$ 两边之间通过，因为对直线 AB 而言，点 C 和点 D 位于同一半平面内，因此，射线 AC 从 $\angle BAD$ 的两边之间通过，故线段 BD 与直线 AC 相交（依定理2.3），所以对角线 BD 与直线 AC 相交。当我们分析 $\angle ABC$ 和 $\angle ABD$ 时，同样可证出对角线 AC 与直线 BD 相交。又已证对角线 BD 与直线 AC 相交，所以直线 BD 与直线 AC 相交。然而，直线 AC 和直线 BD 的交点只能有一个，在直线 AC 上，这个交点是对角线 AC 上的一个点；在直线 BD 上，这个交点又是对角线 BD 上的一个点。所以对角线 AC 与对角线 BD 就在此点相交。定理得证。

定理9.2　凸四边形内角之和等于360°。

证明　设 $ABCD$ 为一个已知的凸四边形（如图57），因为射线 DB 与线段 AC 相交，所以射线 DB 从射线 DA 与 DC 之间通过。由此可得出：$\angle ADC=\angle ADB+\angle CDB$。同理可得：$\angle ABC=\angle ABD+\angle CBD$。由此推理可得出：四边形 $ABCD$ 内角之和等于 $\triangle BAD$ 与 $\triangle BCD$ 的内角之和，即等于360°。定理得证。

平行四边形　两组对边分别平行（即分别在两组平行直线上）的四边形称为**平行四边形**（如图58）。

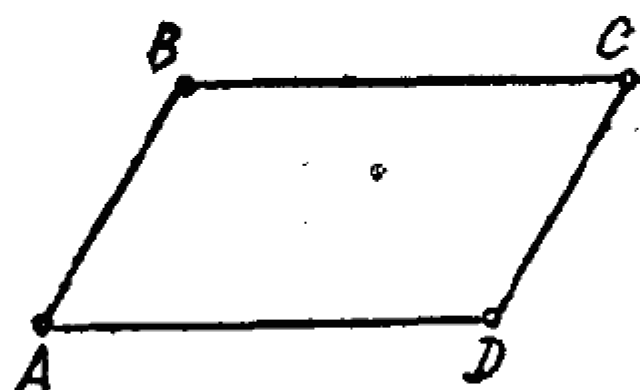


图　58

平行四边形是**凸四边形**。

设 $ABCD$ 为已知平行四边形。现在以平行四边形的任一边

为例，如以AD为例，因为直线BC平行于AD边，所以线段BC与直线AD不相交，即点B和点C，对直线AD而言，位于同一半平面内。线段BC、AB和DC都在这一半平面内。这就是说，平行四边形，对包含其一边AD的直线而言，位于同一半平面内。再取平行四边形其它任何一边，也可得出同样的结论。这就意味着，平行四边形是凸四边形。

定理9.3　平行四边形的对边相等；对角也相等。

证明　设$ABCD$为一个已知的平行四边形（如图59），作平行四边形的对角线AC和BD。因为平行直线AD和BC被AC所截，所以$\angle BCA$和$\angle DAC$是内错角，这是因为点B和点D，对直线AC而言，位于不同的半平面内（线段BD与直线AC相交）。由此得出：$\angle BCA=\angle DAC$。同理可证：$\angle BAC=\angle DCA$。

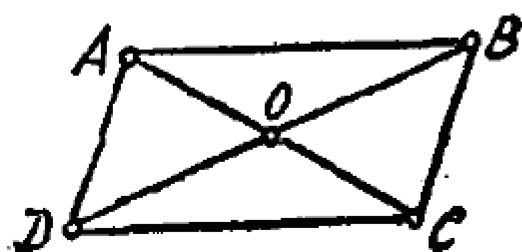


图　59

在$\triangle ACB$和$\triangle CAD$中，AC为公共边，$\angle BCA=\angle DAC$，$\angle BAC=\angle DCA$（上面已证），所以$\triangle ACB\cong\triangle CAD$。因为这两个三角形全等，所以可得出：$BC=AD$，$\angle ABC=\angle CDA$。同理可证，$AB=CD$，$\angle BAD=\angle DCB$。定理得证。

定理9.4　平行四边形的对角线互相平分。

证明　设$ABCD$为一个已知的平行四边形，O为对角线的交点（如图59），在$\triangle AOD$与$\triangle COB$中，$BC=AD$（平行四边形的一组对边），$\angle OBC=\angle ODA$（两条平行直线BC和AD被直线BD所截，内错角相等），$\angle OCB=\angle OAD$（两条平行直线BC和AD被直线AC所截，内错角相等），所以$\triangle AOD\cong\triangle COB$，则$OB=OD$，$OA=OC$。定

理得证。

定理9.5　如果凸四边形有一组对边平行且相等，则此四边形是平行四边形。

如果凸四边形有两组对边分别相等，则此凸四边形是平行四边形。

证明　设$ABCD$为一个已知的凸四边形，其中对边$AD=BC$（如图60），在定理给出的两种条件下，$\triangle ABD$与$\triangle CDB$都全等。对定理的第一部分，可根据全等三角形第一判定法得出：$\triangle ABD\cong\triangle CDB$；对定理的第二部分，可根据全等三角形第三判定法论证：$\triangle ABD\cong\triangle CDB$。

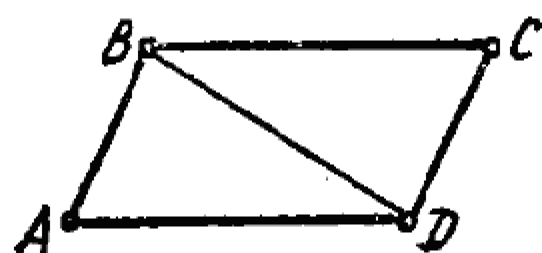


图　60

由这两个全等三角形可以得出：

$$\angle CBD=\angle ADB,\quad \angle ABD=\angle CDB.$$

前两个角是直线BC和AD的内错角，而后两个角是直线AB和CD的内错角，根据内错角相等可得出：$BC\parallel AD$，$CD\parallel AB$，因此，四边形$ABCD$是一个平行四边形。定理得证。

矩形　菱形　正方形

四个角都是直角的四边形是**矩形**（如图61）。

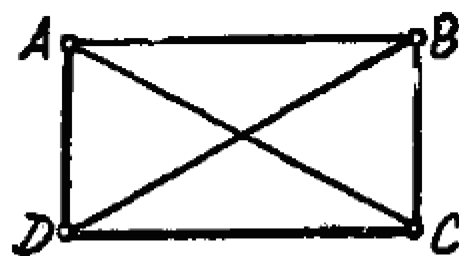


图　61

定理9.6　矩形是一个平行四边形。矩形的两条对角线相等（如图61）。

证明　设$ABCD$为一个已知的矩形，直线AD和BC垂直于直线AB，所以AD平行于BC；直线AB和CD垂直于直线AD，所以AB平行于CD。因此，矩

形$ABCD$是一个平行四边形。

定理的第二个结论，可用$\triangle BAD\cong\triangle CDA$来证明。在$\triangle BAD$与$\triangle CDA$中，$\angle BAD$与$\angle CDA$都是直角，直角边$AD$是公共边，直角边$AB=DC$（平行四边形的对边），所以$\triangle BAD\cong\triangle CDA$。由此得出两个三角形的斜边相等，而两条斜边恰好是矩形的两条对角线。定理得证。

菱形是一个四边都相等的平行四边形（如图62）。

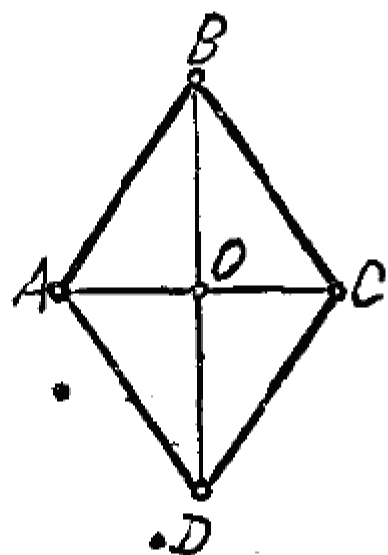


图 62

定理9.7 菱形的对角线互相垂直。菱形的对角线也是对角的平分线。

证明 设$ABCD$是一个已知的菱形（如图62），O为两条对角线的交点。在$\triangle AOB$和$\triangle COB$中，OB是公共边，$AB=CB$（菱形定义给出的条件），$OA=OC$（定理9.4），所以$\triangle AOB\cong\triangle COB$。则：$\angle AOB=\angle COB$，$\angle ABO=\angle CBO$。

因为$\angle AOB=\angle COB$，$\angle AOB+\angle COB=180°$，所以$\angle AOB$与$\angle COB$都是直角。定理的第一个结论得证。

因为射线BD从角ABC的两边中间通过，$\angle ABO=\angle CBO$，所以BD是$\angle ABC$的平分线，定理的第二个结论得证。

正方形是一个四边相等的矩形。

正方形是一个特殊的菱形（每个角都是直角的菱形），**也是一个特殊的矩形**（四边相等的矩形），**所以它具有菱形和矩形的一切性质。**

梯 形

定理9.8 设三条互相平行的直线 a、b、c与直线 d 和 d_1分别相交于点A、B、C和点A_1、B_1、C_1（如图63）。

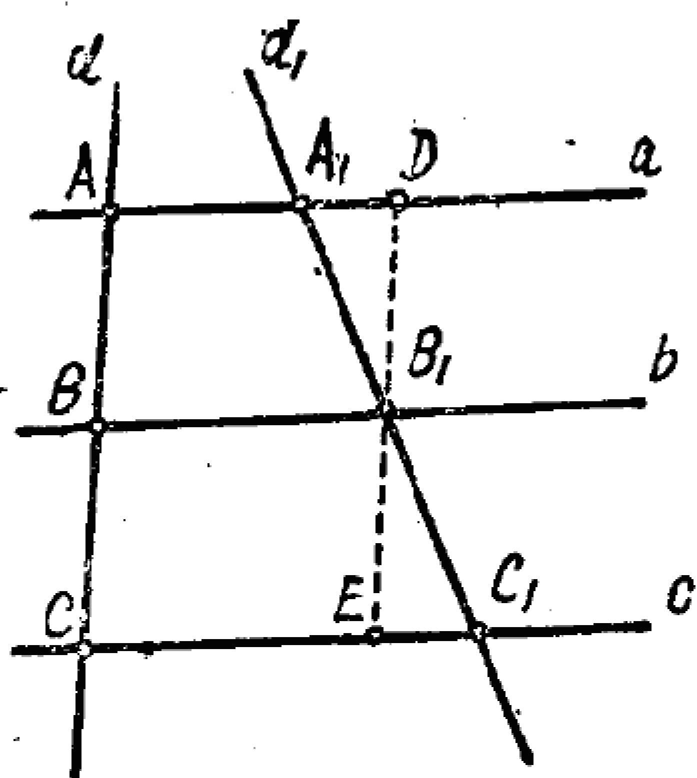


图 63

如果点B位于点A和C之间，则点B_1位于点A_1和C_1之间；如果AB＝BC，则A_1B_1＝B_1C_1。

证明 因为线段AC与直线b相交于B点，并且题设点B位于A和C之间，所以点A和点C在直线b所分隔的不同的半平面内。因为点A和点A_1在与直线b平行的直线a上，所以这两个点，对直线b而言，在同一半平面内。同理，点C和点C_1对直线b而言，在同一半平面内。因此，点A_1和点C_1，对直线b而言，在不同的半平面内，所以线段A_1C_1与直线b相交。只有点B_1既是直线A_1C_1上的点，又是直线b上的点。因此，点B_1位于点A_1和点C_1之间。定理的第一个结论得证。

现在证明定理的第二个结论。过B_1点作一条平行于直线d的直线，它与直线a和c交于点D和点E。在$\triangle B_1A_1D$和$\triangle B_1C_1E$中，$B_1D=B_1E$（因为$B_1D=AB$，$B_1E=BC$，并且题设$AB=BC$），$\angle DA_1B_1=\angle EC_1B_1$，$\angle A_1DB_1=\angle C_1EB_1$（平行线$a$和$c$的内错角），所以$\triangle B_1A_1D\cong\triangle B_1C_1E$，因为两个三角形全等，所以得出：$A_1B_1=B_1C_1$。定理的第二个结论得证。

例题 将一条已知线段AB分为n等分。

解 过A点作一条不与已知线段AB相重合的射线a，在射线a上顺次截取相等的线段AA_1，A_1A_2，A_2A_3，…，$A_{n-1}A_n$，连结A_nB，过A_1，A_2，A_3，…，A_{n-1}分别作

$A_n B$的平行线交线段AB于B_1，B_2，B_3，…，B_{n-1}，这$n-1$个点就把AB线段分为n等分(从定理9.8可得到证明)。

只有一组对边平行的凸四边形叫做**梯形**。平行的一组对边叫做**梯形的底**。不平行的另一组对边叫做**梯形的腰**。连结梯形两腰中点的线段叫做**梯形的中位线**。

定理9.9　梯形的中位线平行于两底，并且等于两底之和的一半。

证明　设$ABCD$为一梯形，AD和BC为已知梯形的底（如图64），PQ为梯形的中位线，过点P作一条平行于两底的直线，根据定理9.8，这条直线必与梯形CD的中点Q相交。因此，这条直线是平行于梯形两底的梯形中位线，定理的第一个结论得证。

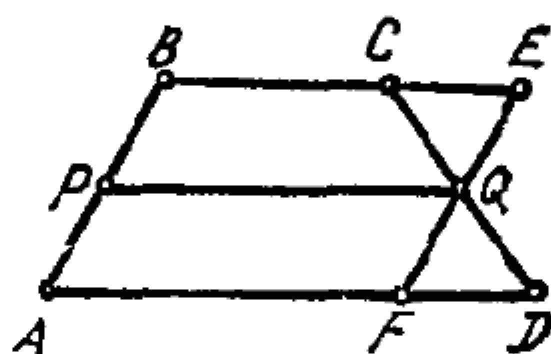


图　64

过点Q作一条平行于AB边的直线EF，点A和点B位于直线EF的同一侧，而点C和点D则分别位于直线EF的两侧。为了确切起见，设点C、点A和点B位于直线EF的同一侧，点C及点E位于直线AB的同一侧。由此可知，点B不在点C与点E之间，点C必位于点B与点E之间。

因为$\triangle CEQ \cong \triangle DFQ$，所以$CE=FD$。根据平行四边形的性质可得$PQ=BE=BC+CE$，$PQ=AF=AD-FD$。两等式相加即得$2PQ=AD+BC$。定理的第二个结论得证。

三角形三条中线的交点　连结三角形两边中点的线段称为三角形的**中位线**。

定理9.10　连结三角形ABC中的AB边和AC边中点的中位线必平行底边BC，并且等于底边的一半（如图65）。

证明　设B_1C_1为$\triangle ABC$的中位线，过B_1作一条平行于

底边BC的直线。根据定理9.8可知，这条直线必交AC线段于其中点C_1。即$\triangle ABC$的中位线B_1C_1在这条直线上。定理的第一个结论得证。

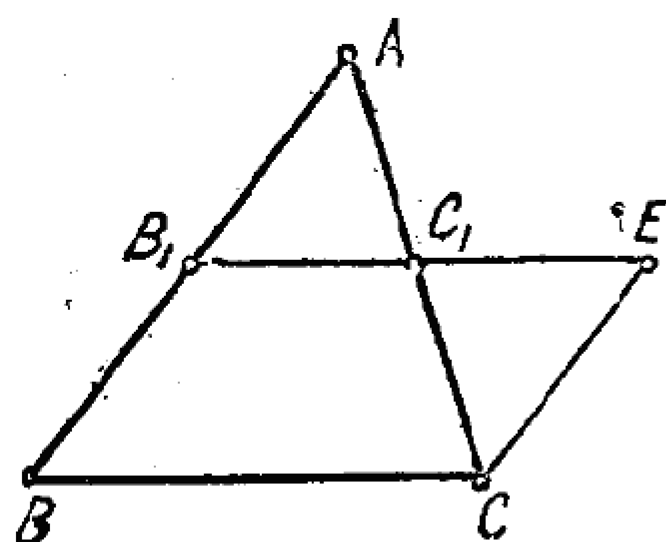


图 65

过点C作一条平行于AB的直线CE，这条直线与直线B_1C_1的延长线交于某点E，$\triangle AC_1B_1\cong\triangle CC_1E$。因为两个三角形全等，所以，$B_1C_1=C_1E$，　$BC=B_1E=B_1C_1+C_1E=2B_1C_1$，即$B_1C_1$等于$\triangle ABC$底边$BC$的一半。定理的第二个结论得证。

定理9.11　三角形的三条中线相交于一点，这点到顶点的距离等于这点到顶点的对边中点的距离的二倍。

证明　设ABC为一个已知三角形（如图66），连结这个三角形的中线AA_1和BB_1，对直线AA_1而言，点C和B_1位于同一半平面内，而点B和点B_1不在同一半平面内。因此，中线BB_1与直线AA_1相交，同理可证，中线AA_1与直线BB_1相交。因为直线AA_1与BB_1只有一个交点，所以这个交点位于中线AA_1和BB_1之上，即这两条中线交于O点。

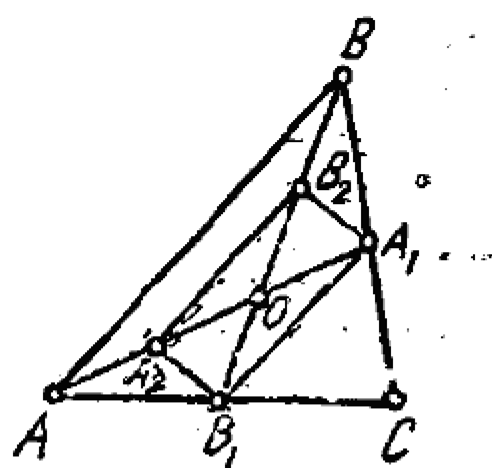


图 66

连结$\triangle ABC$和$\triangle AOB$的中位线A_1B_1和A_2B_2，线段A_1B_1和A_2B_2都平行于AB，并且都等于AB的二分之一。由此得出：四边形$A_1B_1A_2B_2$是一个平行四边形。根据平行四边形的性质，可得出：$B_1O=OB_2$。又因B_2是OB线段的中点，即$OB_2=B_2B$，由上述可知$B_1O=OB_2=B_2B$，$OB=$

$2B_1O$。因此这两条中线的交点O到顶点B的距离等于这点到顶点的对边中点B_1的距离的二倍。同理从C点引出的中线，也必将中线BB_1分成$OB=2B_1O$，所以从C点引出的中线也必经过O点。定理得证。

复习题及练习题

1. 什么样的四边形叫做凸四边形？
2. 证明凸四边形的对角线必相交。
3. 证明凸四边形内角之和等于360°。
4. 什么样的四边形叫做平行四边形？
5. 证明平行四边形是一个凸四边形。
6. 证明平行四边形对边相等，对角也相等。
7. 证明平行四边形相邻的两个角之和等于180°。
8. 证明平行四边形两条对角线互相平分。
9. 什么样的四边形叫做矩形？
10. 证明矩形是一个平行四边形，矩形的两条对角线相等。
11. 证明两条对角线相等的平行四边形是一个矩形。
12. 什么样的四边形是一个菱形？
13. 证明菱形的两条对角线垂直相交；菱形的对角线也是对角的角平分线。
14. 什么样的四边形叫做正方形？正方形有哪些性质？
15. 什么样的四边形叫做梯形？
16. 证明梯形的中位线等于两底之和的一半。
17. 证明三角形的中位线等于第三边的一半。
18. 证明三角形的三条中线相交于一点。
19. 证明对角线相交的四边形是一个凸四边形。

20. 凸四边形的四个角能都是钝角吗？

21. 证明两条对角线相交，并且互相平分的凸四边形是一个平行四边形。

22. 证明两组对角相等的凸四边形是一个平行四边形。

23. 证明任意凸四边形四条边的中点是平行四边形的四个顶点。

24. 在凸四边形内求一点使其到四顶点的距离之和为最小。

25. 证明四个角相等的凸四边形是一个矩形。

26. 假如平行四边形两条邻边的长为$5cm$和$6cm$，在这平行四边形内作一个角的平分线，试问这条平分线将平行四边形的长边分成两条等于多长的线段？

27. 假如菱形的一条对角线等于菱形的边，试问菱形的四个角各为多少度？

28. 证明两条对角线互相垂直相交的平行四边形是一个菱形。

29. 证明平行四边形各角的平分线的交点是一个正方形的四个顶点。

30. 证明一个矩形四边的中点是一个菱形的四个顶点；一个菱形四边的中点是一个矩形的四个顶点。

31. 证明梯形两条对角线中点的连线平行于梯形的两底。

32. 已知一个三角形，对一条已知直线而言，位于同一半平面内，求证：这个三角形三条中线的交点到直线的距离，等于三个顶点到这条已知直线距离的算术平均值。

33. 已知四条边，求作一梯形。

34. 证明三角形从顶点到对边的三条垂线交于一点。（提示：过三角形的各顶点作与对边平行的直线组成一新三角形）。

§ 10. 运动　全等图形

运动的概念　设F和F_1为两个已知的图形，并且两图中的点结合成点对（X, X_1）。如果图形F中的每一点X和图形F_1中的每一点X_1属于一个点对，且只属于一个点对的话，那末，我们就说图形F和F_1是**相互单值对应**。两图形的点X及X_1叫**对应点**。因此，图形F中的每一点X在图形F_1中都有一个完全确定的对应点X_1，反言之，图形F_1中每个X_1点在图形F中也同样都有一个互等对应的点X。

图形F及F_1之间的相互单值对应，还可以说，图形F到图形F_1的相互单值映射或F到F_1的一一映射。我们举一个例子。

设图形F是一条直线a，而图形F_1是一条直线a_1，并设b是一条与两直线a和a_1相交的直线(图67)。任意一条平行于b的直线交直线a于某点X，并交直线a_1于某点X_1，把每两个这样的点结合成点对(X, X_1)。点的这种成对结合就是两直线a及a_1间的相互单值映射或一一映射。

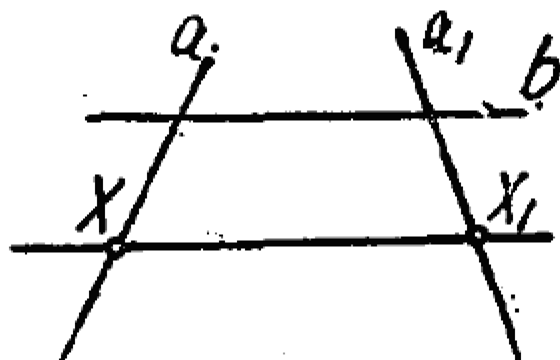


图　67

平面自身相互单值映射叫做**运动**，如果这映射保存距离的话，这就是说，如果X和Y为任意两个点，而X_1和Y_1分别是它们的对应点，那么$XY = X_1Y_1$。

运动的性质

定理10.1　设经过运动，三点A、B、C变成三点A_1、

B_1、C_1，如果A、B、C在一直线上，那么A_1、B_1、C_1也在一直线上，如果B位于A与C之间，那么B_1也必位于A_1与C_1之间。

证明 假设A_1、B_1、C_1三点不在一条直线上，那么它们是三角形的三个顶点。因此，$A_1C_1<A_1B_1+B_1C_1$。根据运动定义即可得出：$AC<AB+BC$，然而，根据线段的度量的性质应有：$AC=AB+BC$，这显然是矛盾的。所以A_1、B_1、C_1三点必在一条直线上。定理的第一个结论得证。

现在证明，B_1点位于A_1与C_1之间。假设A_1点位于B_1与C_1之间，则$A_1B_1+A_1C_1=B_1C_1$，因而$AB+AC=BC$，但这与给定的条件$AB+BC=AC$相矛盾，因此，A_1点不能位于B_1与C_1之间。同理可证，点C_1也不可能位于点A_1与B_1之间。由于A_1、B_1、C_1三点中必应有一点位于其它两点之间，所以B_1只能位于A_1与C_1之间。定理的第二个结论得证。

设有某一运动，即平面自身并且保存距离的相互单值映射。设F为这平面内任意一个图形，当点X描出图形F时，X的对应点X_1描出另一图形F_1。我们可以说图形F_1是图形F运动后得来的图形，我们还可以说图形F运动后变成图形F_1，F全等于F_1。

由定理10.1可推出：**经运动后，直线仍为直线，射线仍为射线，线段仍为等长线段。**

设AB和AC是从公共点A引出不在一条直线上的两条射线，这两条射线运动后，变成射线A_1B_1和A_1C_1，因为运动保存距离，所以根据全等三角形第三判定法可得出：$\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$。因为这两个三角形全等，又可得出：$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$。由此可见，经运动后**两条射线的夹角**

保持不变。

关于直线的对称 设 a 为一条直线，X 为平面内的一点（如图68），过 X 点作一条垂直于 a 的直线 b，直线 b 交直线 a 于点 A。现在按下述规则画出点 X_1，如果点 X 在直线 a 上，则点 X_1 与点 X 重合；如果点 X 不在直线 a 上，则点 X_1 对直线 a 而言，必然在另一半平面内，X_1 又在直线 b 上，并且 $AX_1=AX$，此时，X_1 点是 X 点关于直线 a 的**对称点**，按此定义，X 点也是 X_1 点关于直线 a 的对称点。对于一个平面自身映射，如果点 X 和它关于直线 a 的对称点 X_1 相对应，那么这映射叫做**关于直线 a 的对称变换**，或叫做**关于直线 a 的反射映象**。

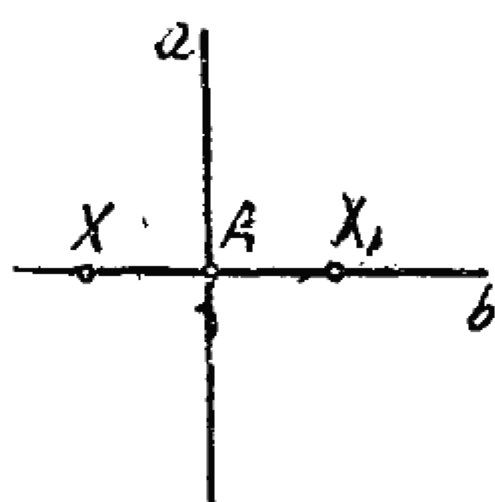


图 68

定理10.2 关于直线的反射映象必是运动。

证明 设 X 和 Y 是任意两个点，X_1 和 Y_1 是点 X 和 Y 关于直线 a 的对称点，我们所要证的结论是 $X_1Y_1=XY$。现在我们先研究点 X 和 Y 不在直线 a 上，也不在垂直于直线 a 的一条直线上（如图69）。

在直角三角形 ABX 和 ABX_1 中，直角边 AB 是公共边，直角边 XA 和 X_1A 相等（根据对称定义得出），所以 $\triangle ABX\cong\triangle ABX_1$。由此可得：$XB=X_1B$，$\angle XBA=\angle X_1BA$。在 $\triangle XYB$ 和 $\triangle X_1Y_1B$ 中，$XB=X_1B$，$YB=Y_1B$，$\angle YBX=\angle Y_1BX_1$，所以 $\triangle XYB\cong\triangle X_1Y_1B$，$X_1Y_1=XY$。

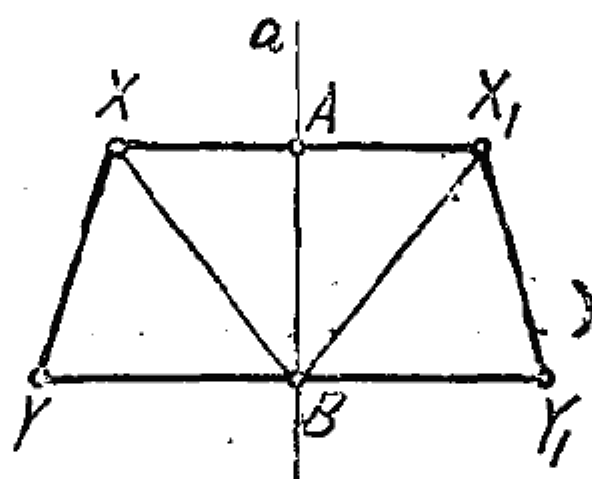


图 69

现在让我们再来研究其它一些情况。如果在两点X和Y中有一点在直线a上，或两点均在直线a上，或两点都在一条垂直于直线a的直线上，同理都可以证出$X_1Y_1=XY$。希望读者自已证明这些情况作为练习。

例如：经过关于直线a的反射映象后，图形F变成一个新图形F_1，它们是在直线a两边完全重合的图形，这种图形叫做关于直线a的**对称图形**或**轴对称图形**，而直线a叫做**对称轴**。如等腰三角形顶角的平分线就是这个等腰三角形的对称轴；菱形的两条对角线均为菱形的对称轴；过矩形对角线的交点且平行于两组对边的两条直线均为矩形的对称轴；正方形的两条对角线和过对角线交点平行于两组对边的直线均为正方形的对称轴（如图70）。

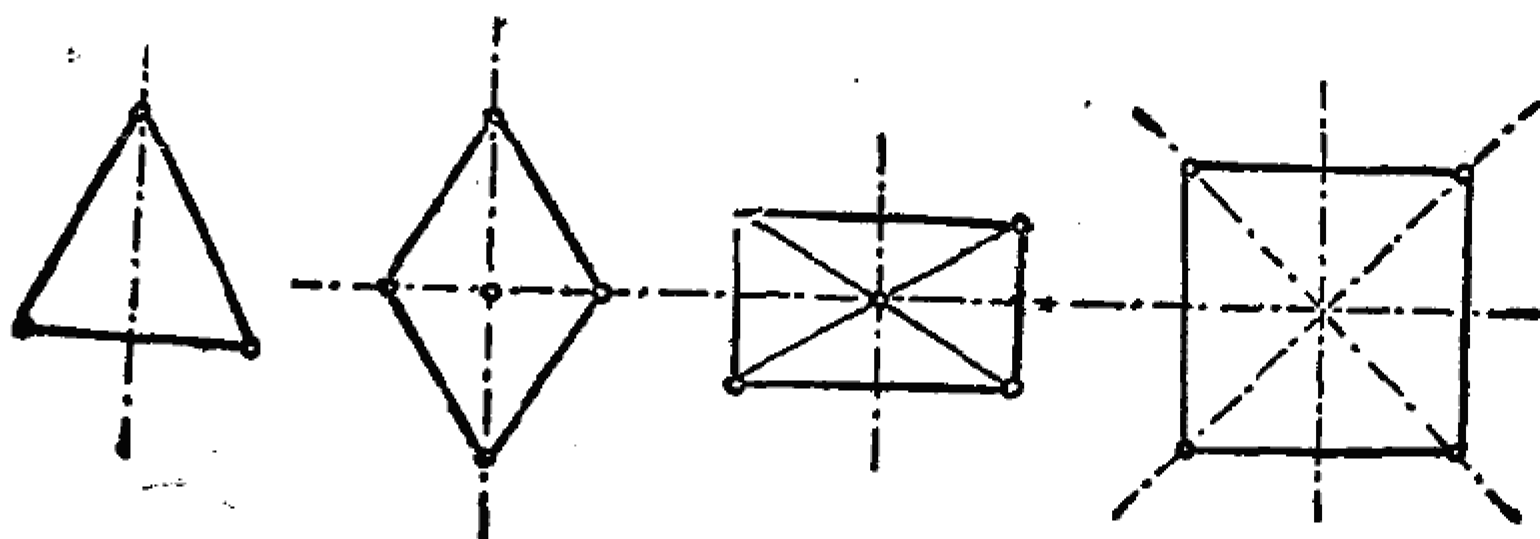


图 70

关于点的对称 设O为平面上的一点，X为任意一点（如图71），按下面规则来取X_1点，如果X点与O点重合，则X_1点就是O点；如果X点不与O点重合，则点X_1位于与射线OX反向的射线上，并且$OX_1=OX$。这样取得的点X_1为点X**关于O点的对称点**。对于一个平面自身的映射，如果点X和

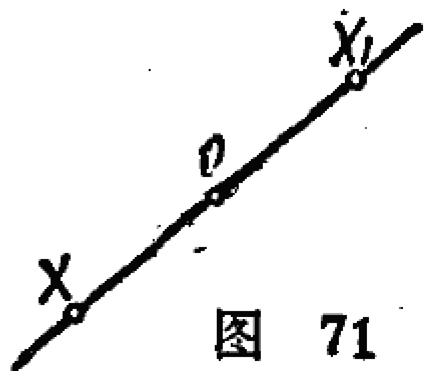


图 71

它关于O点的对称点X_1相对应，那么这映射叫做关于点O的**对称变换**。

定理10.3　关于点的对称变换是一种运动。

证明　设X和Y为任意两个点，而X_1和Y_1为X和Y关于O点的对称点，我们所要证的是$X_1Y_1=XY$。现在让我们研究点X和Y不与点O重合，并且不在过点O的同一直线上的情况（如图72）。

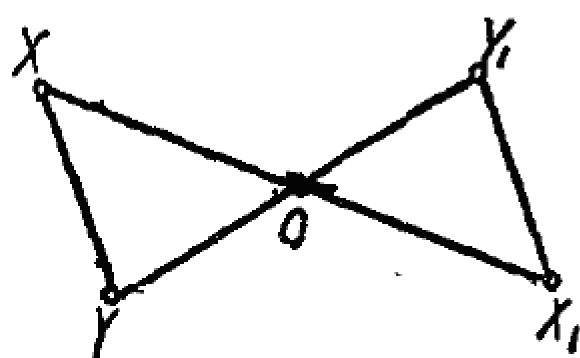


图　72

在$\triangle XOY$与$\triangle X_1OY_1$中，$\angle XOY=\angle X_1OY_1$（对顶角），根据对称的定义$X_1O=XO$，$Y_1O=YO$，所以$\triangle XOY\cong\triangle X_1OY_1$，由此即得$X_1Y_1=XY$。定理得证。

在两点X及Y关于O点的另一些配置的情况下，同样可证$X_1Y_1=XY$。建议读者自己证明这些情况作为练习。

如果一个图形经过关于O点的对称变换，变换前、后的图形完全重合，那么这图形叫做**中心对称图形**。O点叫做**对称中心**。

平行四边形就是一个中心对称的图形，对角线的交点是对称中心。

平移　对于一个运动，其各点均沿平行线移动同一个距离，这运动叫**平移**。

定理10.4　不管A_1及A_2是怎样的两个点，必存在唯一的一个平移，平移后点A_1变成点A_2。

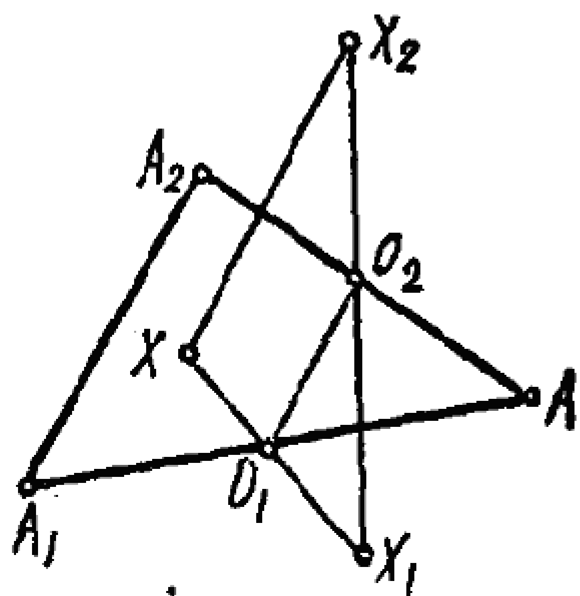


图　73

证明　如图73，在直线A_1A_2

外取一点A，并以O_1和O_2分别表示线段A_1A和线段A_2A的中点。设X为平面上任意一点，点X_1为点X关于点O_1的对称点，然后取点X_2为点X_1关于O_2的对称点。由于关于O_1点的对称变换和关于O_2点的对称变换均保存距离，所以点X_2及点X是平面上对应点的变换，这种变换称为运动。

因为线段O_1O_2是$\triangle X_1X_2X$的中位线，所以直线XX_2平行于直线O_1O_2，并且线段XX_2等于线段O_1O_2的两倍。因此，平面上的点必沿平行于直线O_1O_2的直线移动一个等于$2(O_1O_2)$的距离，这种运动叫做平移。经平移后，点A_1变成点A_2。

现在让我们来证明平移的唯一性（如图74），设X为平面上任意一点，过X点作一条平行于A_1A_2的直线，并在这条直线上截取线段XX_1和线段XX_2使它们都等于线段A_1A_2，点X_1及点X_2分别位于直线A_1X的两侧。为了明确起见，设点X_1与点A_2位于直线A_1X的同一侧，则点X_2位于直线A_1X的另一侧。

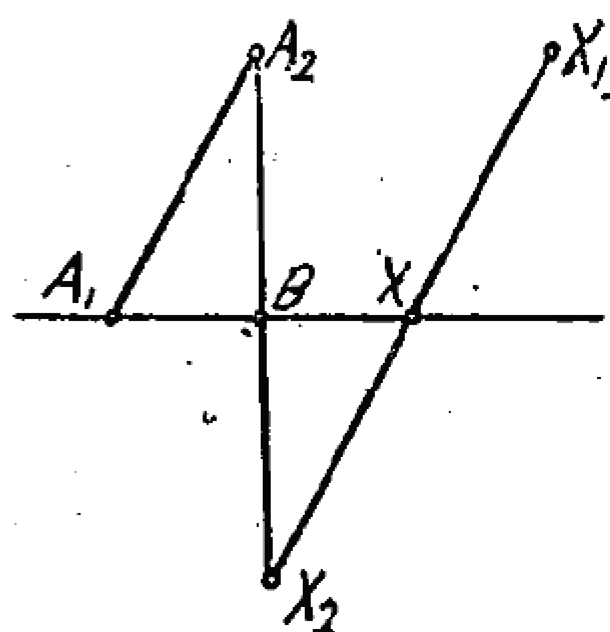


图 74

这样，在A_1变为A_2的平移中，点X_2不可能是点X的对应点。用反证法，如果在A_1变为A_2的平移中，点X果真变为点X_2(即X_2对应于X)，则直线A_1X将变为直线A_2X_2。直线A_2X_2及A_1X的交点B既然位于A_1X上，故B可认为是不动点，而B又在A_2X_2上，根据平移的定义，B又应移动一个等于A_1A_2的距离。这种矛盾就证明了X_2不能是X的对应点。因此，X只能对应X_1，取X_1是唯一的，这就证明了平移的唯一性。定理得证。

转动 所谓绕O点转一角φ的**转动**是指：O点为运动时

的不动点，并且经过O点的每一条射线转一角φ，即过O点的射线和它的对应射线所夹的角等于φ。

定理10.5 如果在运动中，只有一点保持不动，那么这运动必是转动。

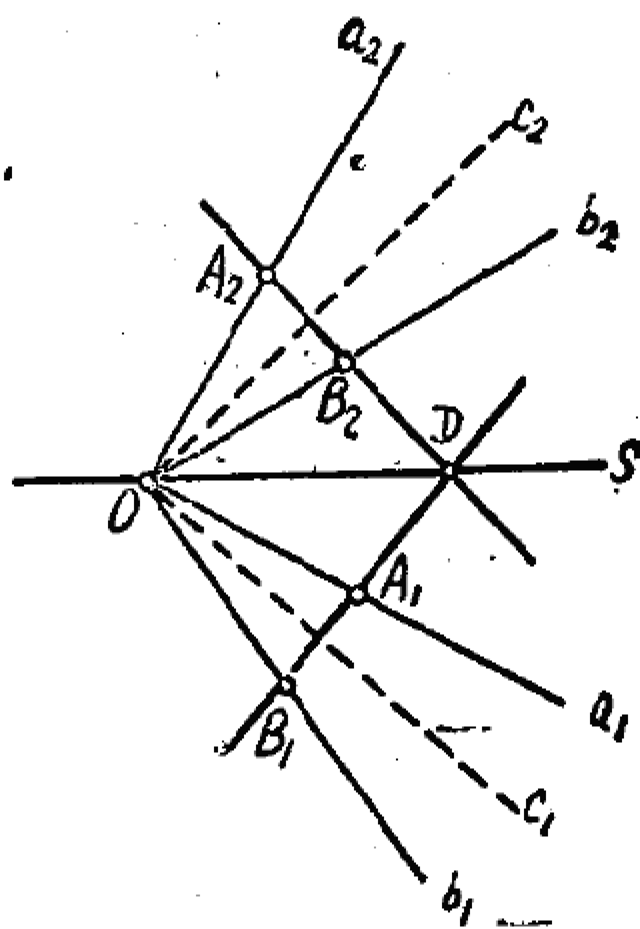


图 75

证明（如图75） 设O点为运动中的不动点，从点O引射线a_1和b_1，运动后射线a_1和b_1分别变为射线a_2和b_2，角(a_1b_1)和角（a_2b_2）为运动前后的对应角，故两角相等。作角（a_1b_1）的平分线c_1，作角（a_2b_2）的平分线c_2及作角（c_1c_2）的平分线，角（c_1c_2）的平分线以直线s来表示。

因为平分线c_1和c_2关于直线s对称，并且角(a_1b_1)与角(a_2b_2)相等，所以这两角也必关于直线s对称。这种对称有两种方式：或者射线a_1与a_2、b_1与b_2为对应射线；或者a_1与b_2、b_1与a_2为对应射线。现在我们来证第一种对应方式不可能成立。

在直线s上取一个异于点O的点D，过点D作一条与射线a_1和b_1相交的直线，设A_1和B_1为交点，这条直线关于直线s的对称直线交射线a_2及b_2于点A_2及B_2。在第一种对应方式中，关于直线s的对称变换使点A_1变成点A_2，使点B_1变成点B_2。因O点是不动点，$OA_1=OA_2$，$OB_1=OB_2$，所以点A_1与点A_2对应，B_1与B_2对应（如运动定理所述）。

因为每一个运动都保持点与点之间的距离，及点在直线上的分布次序，所以在第一种对应方式中关于直线s的对称

变换使直线 A_1B_1 上任意点X变成与点X重合的对应点。尤其当点D是不动点时也应如此，这显然是不可能的。因为题设在已知的运动中只有一个不动点O，所以第一种对应方式不可能成立。

现在来研究第二种对应方式。在这种方式中关于S的对称变换使射线a_1变成b_2，a_2变成b_1，于是按关于S的对称变换，角（a_1a_2）对应于角（b_1b_2），从而两角相等。根据定义，所给运动必为转动。定理得证。

由此定理可见：接连对两条相交直线进行两次反射映象必得到一个转动。

事实上，接连对两相交直线进行两次反射映象，运动又只有一个不动点（两直线的交点），根据定理10.5，这种运动是转动。

复习题及练习题

1．说明什么是运动，什么样的图形叫做全等图形？

2．证明定理10.1：设经过运动，三点A、B、C变成三点A_1、B_1、C_1。如果A、B、C在一条直线上，那么A_1、B_1、C_1也在一条直线上。如果点B位于点A和点C之间，那么点B_1也必位于点A_1和C_1之间。

3．证明：运动后，直线仍为直线，相交直线仍为相交直线，平行直线仍为平行直线。

4．说明什么是关于直线的对称？

5．证明：关于直线的对称是运动。

6．证明：在图70中，虚线是这些图形的对称轴。

7．说明什么是关于点的对称变换？

8. 证明：关于点的对称变换是运动。

9. 证明：平行四边形对角线的交点是对称中心。

10. 什么是转动？

11. 什么是平移？

12. 证明：如果运动时A、B两点是不动点，则直线AB上所有点都是不动点。

13. 证明：如果不在一条直线上的三点是不动点，则所有点都是不动点。

14. 证明：只需用不多于两次的反射映象，就可使任何两个相等的线段重合。

15. 证明：只需用不多于三次的反射映象，就可使任何两个全等三角形重合。

16. 证明：只需用不多于三次的反射映象，就足够获得任何运动。

17. 如果a和b是图形的对称轴，试证关于直线b对称于直线a的直线也是图形的对称轴。

18. 证明具有对称轴的三角形是一个等腰三角形。

19. 证明三角形不可能有对称中心。

20. 证明：如果A和B是图形的对称中心，那么关于点B对称于点A的点A_1也是一个对称中心，因此这个图形有无穷个对称中心。

21. 证明：关于两条平行直线接连进行两次反射映象，结果是平移。

22. 证明：关于A及B两点接连进行两次对称变换，结果是平移。

23. 已知一条直线及直线外两点A和B，试在直线上求出一点C，使由点C到A及B两点的距离之和为最小。研究

下面两种情况：

1）对已知直线而言，A和B两点位于不同的半平面内；

2）对已知直线而言，A和B两点位于同一半平面内。

§11. 圆

圆的最简单性质 平面内，和一个定点等距的点的轨迹叫做**圆周**（简称**圆**）。这个定点叫做**圆心**。圆心到圆上点的距离叫做圆的**半径**，即连结圆心及圆上任意一点的线段叫做圆的半径。连结圆上两点的线段叫做**弦**。经过圆心的弦叫做**直径**。

定理11.1 圆的任何一条直径都是它的对称轴。圆心是它的对称中心。

证明 设a为圆的直径，X为圆上任意一点（如图76），取点X的关于直径a的对称点X_1，在直角三角形OAX和OAX_1中，直角边OA为公共边，直角边$AX=AX_1$，（根据对称的定义），所以$\triangle OAX\cong\triangle OAX_1$。因为两个直角三角形全等，所以可得出：$OX_1=OX$，即$X_1$在圆上。因此，经过关于直径的对称变换，圆周上的各点都对称，即直径是圆的对称轴。

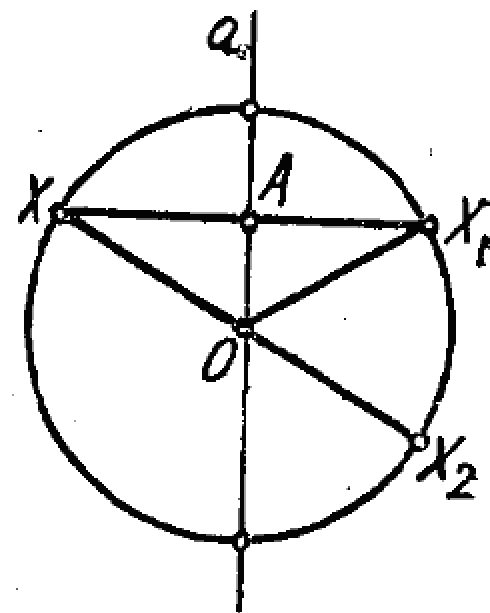


图 76

现在取点X_2为点X关于圆心O的对称点（如图76），根据关于点的对称的定义可得：$OX_2=OX$，即X_2点在圆周上。由此得出：圆心是圆的对称中心。定理得证。

定理11.2 垂直于弦的直径平分这条弦。

证明 设AB是已知的一条弦，C为这条弦的中点（如图77），过C点作一条直径。在$\triangle OCA$和$\triangle OCB$中，$OA=OB$（该圆的半径），OC为公共边，$AC=CB$（C为AB弦的中点）。所以，根据全等三角形第三判定法得出：$\triangle OCA \cong \triangle OCB$。因为两个三角形全等，所以$\angle ACO$与$\angle BCO$相等，并互为补角，即这两个角都是直角。由此得出，直径OC垂直于弦AB，且平分这条弦。因为过圆心O向弦AB只能引出一条垂线，所以不存在其它垂直于AB弦的直径。定理得证。

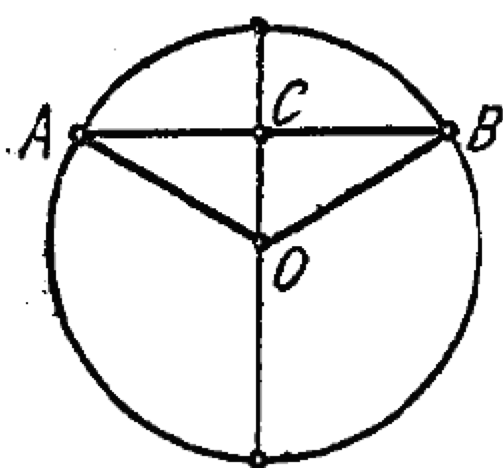


图 77

定理11.3 任意弦不大于直径，只有过圆心的弦才等于直径。

证明 设AB弦不是直径（如图77），在三角形AOB中，$AB<AO+OB$，因为AO与BO是半径，所以弦AB小于直径。定理得证。

过圆上一点A，作一条垂直于半径的直线，这条直线叫做圆的过A点的**切线**（如图78），A点叫做**切点**。

定理11.4 一条切线与圆只有一个公共点，即切点。

证明 设B为切线上异于切点A的任意一点（请看图78），根据垂线与斜线的性质得出$OB>OA$，即点B到圆心的距离大于半径。由此可得出：点B不在圆周上。定理得证。

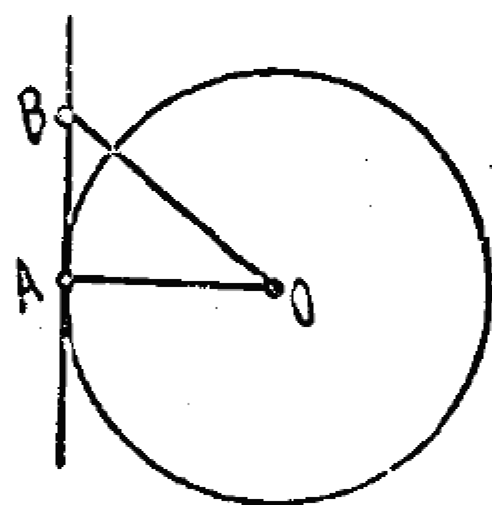


图 78

圆心角 设A和B为圆上两个点（如图79），过A、B两点作一条直线，这条直线将平面分割成两个半平面，位于

两半平面中的圆的两部分都叫做**圆弧**。如果 AB 为直径，那么所分得的圆弧都叫做**半圆**。

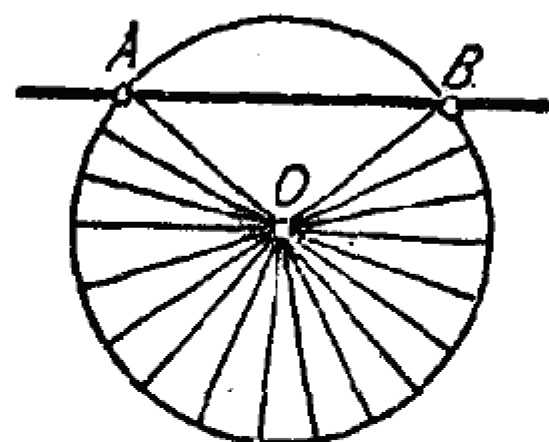


图 79

假如AB弦不是直径，我们用如下的方法来分圆弧。在直线AB所分割的两半平面中，圆心只能在一个半平面内，圆心所在的半平面内的圆弧叫做**大于半圆的圆弧**，而另一圆弧叫做**小于半圆的圆弧**。过小于半圆的圆弧上两点所作的半径与弦 AB 相交，而过大于半圆的圆弧上两点所作的半径不与弦 AB 相交。

对已知圆弧而言，在由圆心引出的所有射线之中必有两条射线与圆弧两端点相交，这两条射线所夹的角叫做**圆心角**。图79中所绘出的圆心角射线是大于半圆的圆心角的射线。

圆心角度数按下列规则来确定。如果圆心角所对的弧$\overset{\frown}{AB}$小于半圆时；那么我们就取射线OA及OB所夹之角的度数作为圆心角的度数；若圆心角所对弧等于半圆，即 AB 为直径，则圆心角的度数为180°；最后，如果圆心角所对弧大于半圆，则圆心角的度数为$360°-\alpha°$，其中$\alpha°$是相应小于半圆的圆心角（也称补角）的度数。

圆周角　如果角的顶点A位于圆上，角的两条边交圆于异于点A的两点B及C，那么我们称此角为**圆周角**(图80)。直线 BC 将圆分成两个圆弧，不包含点A那个圆弧所对的圆心角叫做对应于已知圆周角

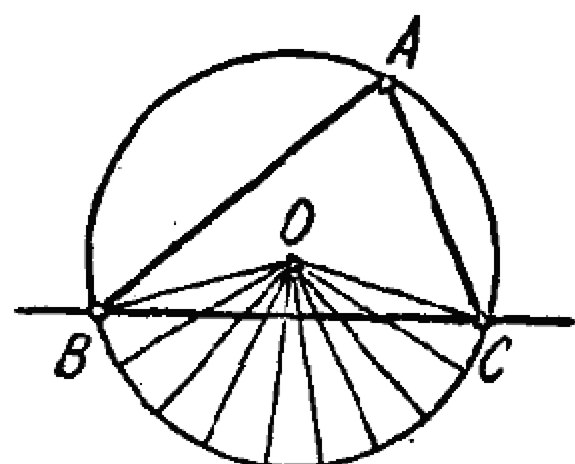


图 80

的圆心角。在图80中，对应于圆周角的圆心角用自圆心引出的两条射线来表示。

定理11.5　圆周角等于它所对应的圆心角的一半。

证明　让我们先研究有一条边是直径的圆周角（如图81）。在这种情况下，圆周角$\angle BAC$所对应的圆心角为BOC。三角形AOB是一个等腰三角形，$OA=OB$，其底角$\angle OAB=\angle OBA$，$\angle BOC$是$\triangle ABO$的一个外角，所以，$\angle BOC=\angle OAB+\angle OBA$。由此可得出：$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$。

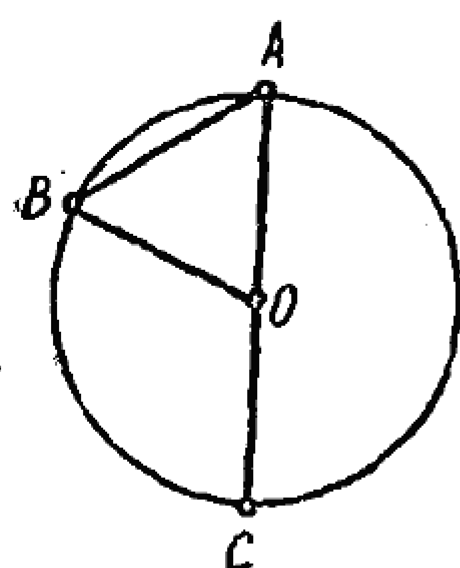


图　81

现在设圆周角的两条边没有一条边是直径，从圆周角的顶点A引直径AD，可能出现两种情况：1）圆周角A的两边被直径AD分开（如图82）；2）角A的两边不被直径AD分开。

现在来分析第一种情况。根据上面已证的结论可得出：$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD$，$\angle CAD=\frac{1}{2}\angle COD$。如果圆周角$\angle BAC$所对应的圆心角小于半圆（如图82—左），由此可得

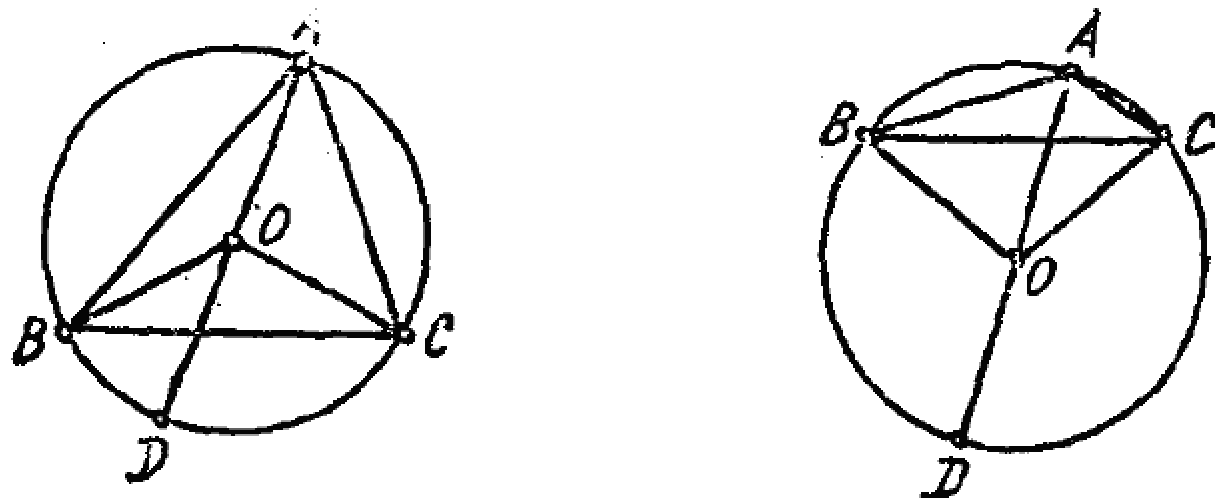


图　82

出 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$，即圆周角等于它所对应圆心角的一半。

如果圆周角$\angle BAC$所对应的圆心角大于半圆（如图82—右），则$\angle BOD=180°-\angle AOB$，$\angle COD=180°-\angle AOC$，由此可得出：$\angle BAC=\frac{1}{2}(360°-\angle BOC)$，即圆周角$\angle BAC$等于它所对应的圆心角的一半。

第二种情况，当直径 AD 不分隔圆周角 A 的两边时，也可用同理证明其结论。定理得证。

由定理11.5可推出：**在同圆中，如果所有圆周角的顶点都位于 AB 直线所分割的一个圆弧上，并且圆周角的两条边都过圆上A、B两点的话，那么这些圆周角必相等**(如图83)，**直径上的圆周角为直角。**

设 AB 为圆的一条弦（如图84），过 A 点作圆的切线，切点 A 将切线分成两条射线（半切线）。半切线与 AB 弦的夹角和与半切线在同一半平面内的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所对应的圆心角称为对应角。

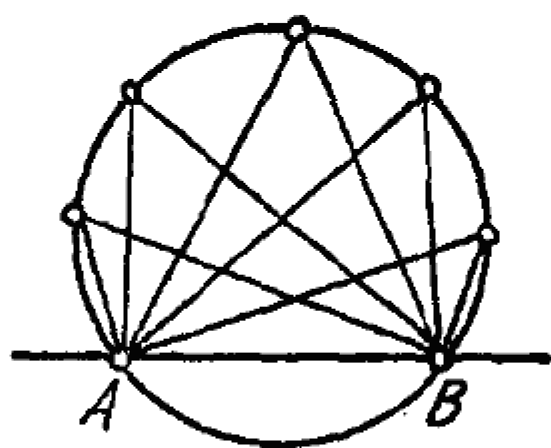


图 83

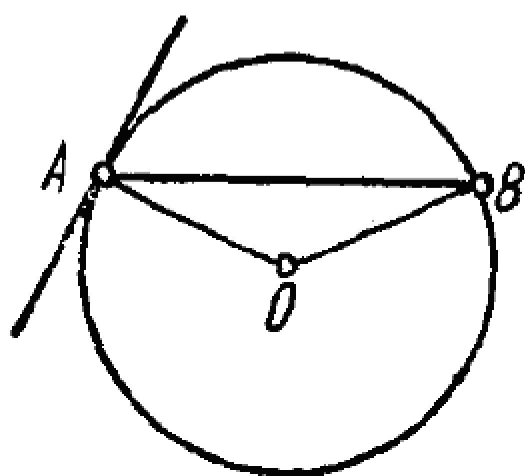


图 84

定理11.6　弦和其端点的半切线所夹的角等于此角所对应的圆心角的一半。

证明 先考虑与较小圆心角对应的半切线与弦所夹的角（图84）。在此情形下，半切线与弦所夹的角等于$90°-\angle OAB$，但角OAB等于$\frac{1}{2}(180°-\angle AOB)$，因此半切线与弦所夹的角等于$\frac{1}{2}\angle AOB$，即等于对应的圆心角的一半。另一条半切线与弦所夹的角，是前一条半切线与弦所夹的角的补角，故等于$180°-\frac{1}{2}\angle AOB$，而这恰好是那个较大圆心角的一半。定理得证。

内切圆和外接圆 设X为一点，ABC为一个三角形。如果对BC边而言，X点与A点在同一半平面内，对AC边而言，X点与B点在同一半平面内，对AB边而言，X点与C点在同一半平面内（如图85），那么我们就说，点X位于三角形ABC内，圆心在三角形内，并与三角形三边都相切的圆叫做三角形的**内切圆**.

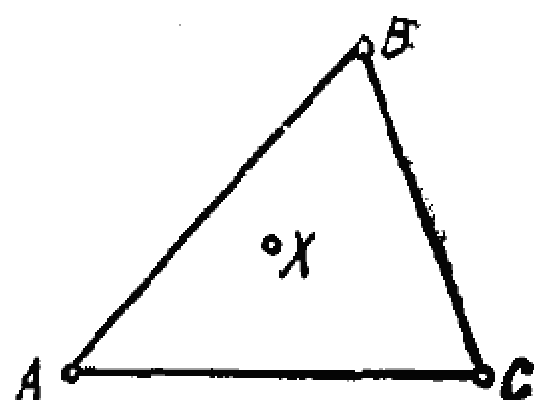


图 85

证明 三角形内切圆的圆心位于三角形三条内角平分线上（图86）.

设O点为三角形内切圆的圆心，因为点O位于三角形内，故对直线AC而言，射线AO与AB位于同一半平面内；对直线AB而言，射线AO又与射线AC位于同一半平面内。因此，射线AO从射线AB和AC之间通过。设C_1和B_1为三角形ABC在AB

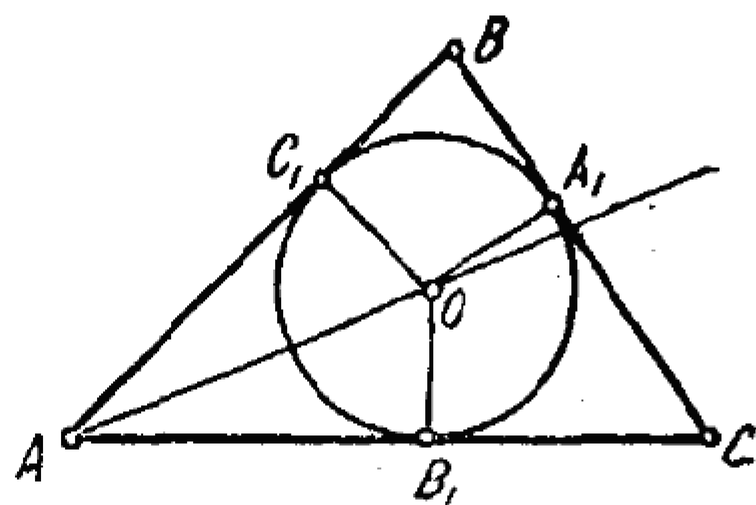


图 86

和AC边上与圆相切的切点，在直角$\triangle AOC_1$和$\triangle AOB_1$中，斜边AO是公共边，$OC_1=OB_1$，（同圆的半径），所以$\triangle AOC_1\cong\triangle AOB_1$。由此可得出：$\angle OAC_1=\angle OAB_1$。这就是说，三角形内切圆的圆心位于三角形$\angle A$的平分线上。同理可证：内切圆的圆心位于另外两内角的平分线上。

现在我们证明，**任意三角形都可作一个内切圆。**

作一三角形两内角的平分线(如图87)，两内角的平分线交于一点O（证明三角形内角平分线相交的方法与证明三角形中线相交的方法完全相同)。从O点向BC、AC及AB边作垂线OA_1、OB_1及OC_1，在直角$\triangle AOB_1$和直角$\triangle AOC_1$中，斜边AO是公共边，因为AO是$\angle BAC$的平分线，所以$\angle OAB_1=\angle OAC_1$，故$\triangle AOB\cong\triangle AOC_1$，所以$OB_1=OC_1$。

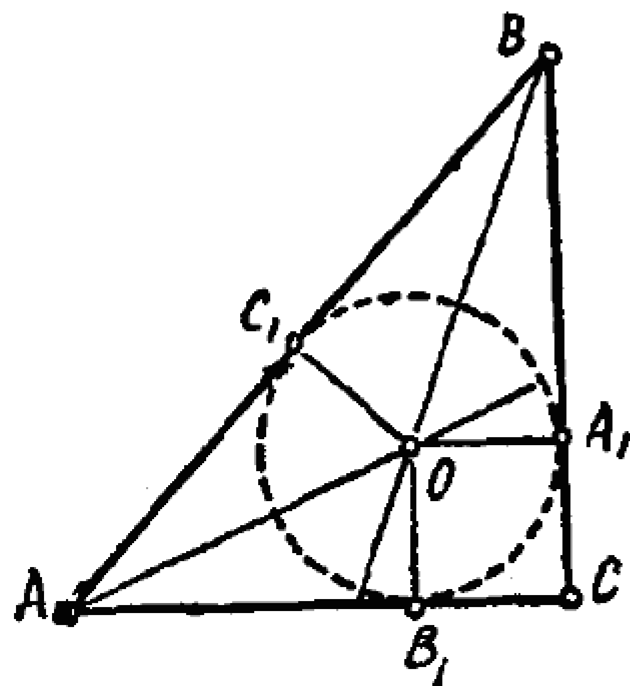


图 87

同理可证：$OC_1=OA_1$。以O为圆心，以OA_1为半径的圆与$\triangle ABC$的三边相切于A_1、B_1、C_1，即以O为圆心、以OA_1为半径的圆是三角形ABC的内切圆。

过三角形三顶点的圆称为三角形的**外接圆。**

求证　**任意三角形都有一个外接圆。**

证明　设ABC为一已知三角形（如图88），过三

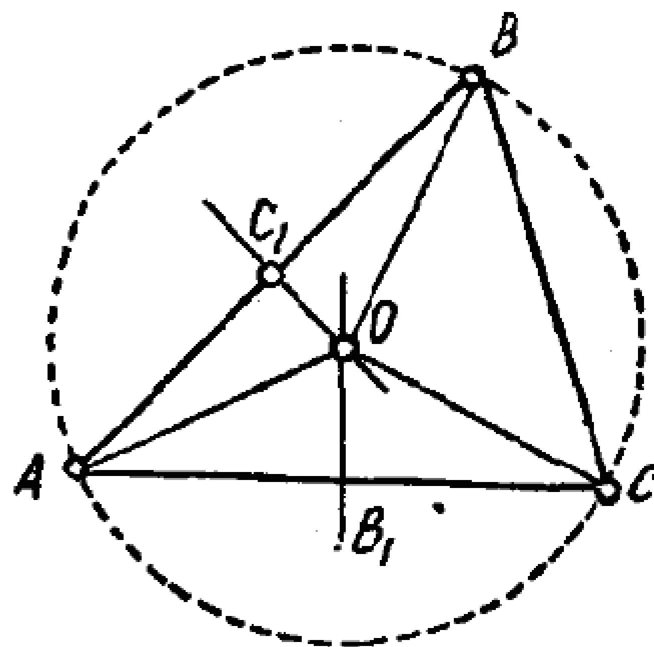


图 88

角形两边AB和AC的中点分别作垂线，这两条垂线必交于一点O。用反证法证明：如果两条垂线OC_1和OB_1不相交，而互为平行，那么垂直于它们的直线AB及BC也将平行，可是实际AB与AC相交于A点。

因为直角三角形AOB_1与直角三角形COB_1全等，可得出$OA=OC$，又因直角三角形AOC_1与直角三角形BOC_1全等，即可得出$OA=OB$。因此，以O点为圆心，以OA为半径的圆必经过三角形ABC的三顶点，所以这个圆就是三角形的外接圆。

例题　已知一圆，其圆心为O，试从圆外已知点A向圆作切线。

解（如图89）：以线段OA为直径作一圆，设B和C为这个圆与已知圆的交点，因为$\angle OBA$和$\angle OCA$都是直角（定理11.5），所以直线AB和AC就是所要求作的两条切线。

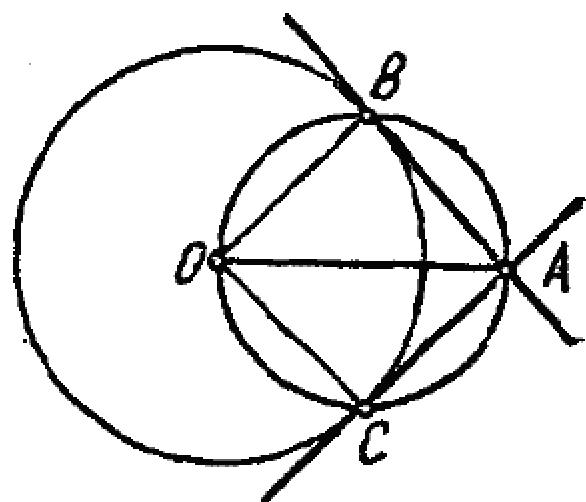


图　89

复习题及练习题

1．什么样的图形叫做圆，什么是圆心，什么是半径，什么是弦，什么是直径？

2．证明任意一条弦都不可能大于直径，只有过圆心的弦才等于直径。

3．证明：垂直于弦的直径必平分这条弦。

4．证明直径是圆的对称轴，圆心是圆的对称中心。

5．说明什么是圆弧，什么样的圆弧是小于半圆的弧，什么

样的圆弧是大于半圆的弧？

6. 什么是已知圆弧所对的圆心角？

7. 如何度量圆心角？

8. 什么样的角叫做圆周角？什么样的角是圆周角所对应的圆心角。

9. 证明定理：圆周角等于它所对应的圆心角的一半。

10. 证明弦和其端点的半切线所夹的角等于此角所对应的圆心角的一半。

11. 说明什么样的点叫做三角形内的点，什么样的圆叫做三角形的内切圆？

12. 证明在任意三角形内都可作一个内切圆。内切圆圆心位于三内角的平分线上。

13. 什么样的圆叫做三角形的外接圆？
证明任意三角形都有一个外接圆，且只能有一个外接圆。

14. 如果一条直线与圆有一个公共点，这个点又不是切点，试证明这条直线与这个圆还有一个交点。

15. 证明一条直线与一个圆不可能有三个交点。

16. 已知一个圆的半径，求作与已知角两边相切的圆。

17. 已知一个圆的半径，求作与两个已知圆相切的圆。此题最多能有几个解？

18. 从已知点A向过已知点B的直线作垂线，求垂足的轨迹。

19. 已知三角形的底AB和在顶点C的角，试求三角形顶点C的轨迹。

20. 已知三角形底边为AB，顶角为C及底边AB上的高，求作三角形ABC。

21. 从圆上已知一点作弦，求各弦中点的轨迹。

22. ABC为一个三角形，求作与其边AB、AC和 BC相切的圆。试问这种圆能作几个？

23. 两圆相交于A点和B点，过B点作任意直线交两圆于X点和Y点，求证$\angle XAY$为常数。（即角XAY的值不因直线XY变而变）。

24. 如果凸四边形各顶点在同圆上，则这个凸四边形称为圆内接四边形，证明圆内接四边形的对角互补。

25. 证明从圆外一点A向圆所作的两条切线AB和AC长度相等（请看图89）。

26. 如果凸四边形各边共切于一圆，则这个凸四边形为圆的外切四边形。证明圆的外切四边形两组对边之和相等。（提示：从圆外一点向圆所作的两条切线长相等，请参照复习题25.）

27. 证明三角形内任意两点间的距离必小于三角形的最大边。

§12. 相似三角形

相似三角形的基本判定法　如果在$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$中：

$$\angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1,\ \angle C=\angle C_1,$$

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1},$$

则$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$称为**相似三角形。**

简而言之，两个三角形，如果各角对应相等，对应边成比例，这两个三角形称为相似三角形。相似用符号“∽”表示。上述情形可表示为$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$。

定理12.1　**$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$中，如果$\angle A=\angle A_1$，**

$\angle B=\angle B_1$，则$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$。

证明 三角形三内角之和等于 180° 因为 $\angle A=\angle A_1$，$\angle B=\angle B_1$,所以$\angle C=\angle C_1$。现在证明$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$的对应边成比例。

在射线AB上截取等于A_1B_1的线段AB_2(如图90一左)，我们明确地设$AB\leqslant A_1B_1$，过B_2点作BC的平行线与射线AC交于一点C_2，两平行线BC和B_2C_2被直线AB_2所截，同位角相等,故$\angle ABC=\angle AB_2C_2$。又因$\angle B_2AC_2=\angle B_1A_1C_1$(定理的已知条件)，而$AB_2=A_1B_1$，$\angle AB_2C_2=\angle A_1B_1C_1$(根据作图)，所以$\triangle AB_2C_2\cong\triangle A_1B_1C_1$。由此可得：$AC_2=A_1C_1$。

在射线AB上截取较短的线段AP_1，使$\frac{AB}{AP_1}$和$\frac{AB_2}{AP_1}$的商不是整数(如图90一右)，在射线AB上取点P_2，P_3，…，P_k，使$AP_k=KAP_1$。设n为AB除以AP_1的整数商，

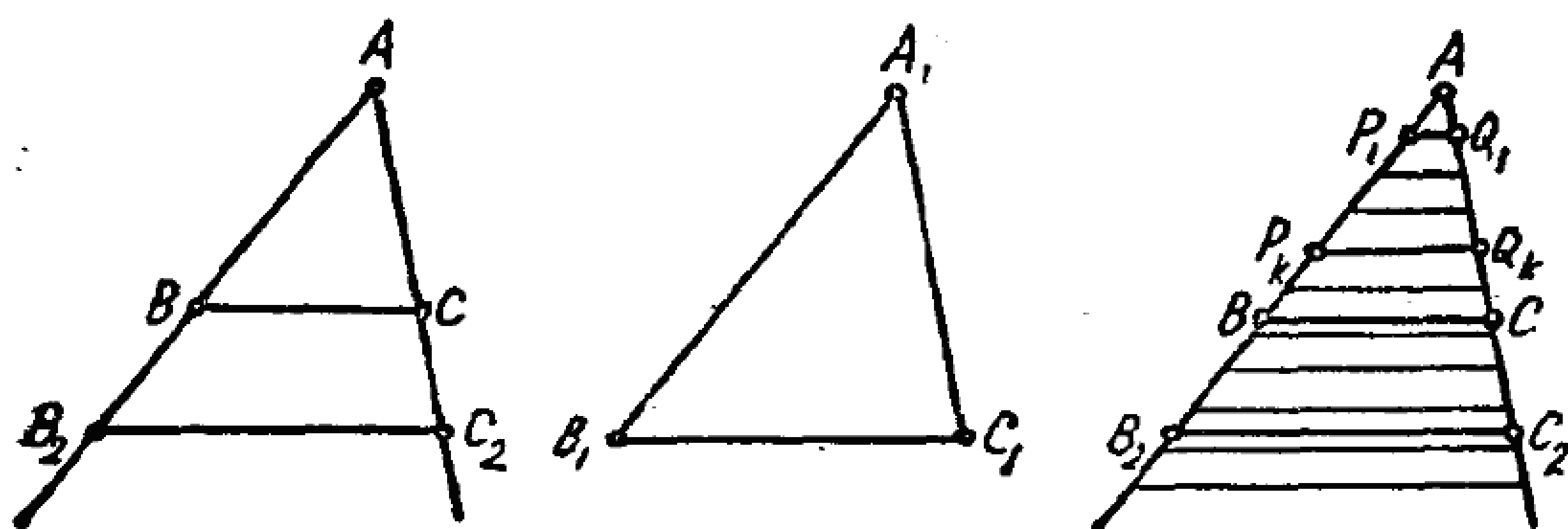


图 90

m为AB_2除以AP_1的整数商。因为$AB\leqslant A_1B_1$，则$n\leqslant m$。于是点B位于点P_n和点P_{n+1}之间，点B_2位于点P_m和点P_{m+1}之间。因此，

$$nAP_1<AB<(n+1)AP_1,$$
$$mAP_1<AB_2<(m+1)AP_1.$$

由此可得出：

$$\frac{n}{m+1}<\frac{AB}{AB_2}<\frac{n+1}{m}. \qquad (1)$$

过点P_1，P_2，P_3，…，作BC的平行线。根据定理9.8，这些直线与AC相交于点Q_1，Q_2，Q_3，…，并且线段AQ_1，Q_1Q_2，Q_2Q_3，…都相等。点C位于点Q_n和点Q_{n+1}之间，而点C_2位于点Q_m和点Q_{m+1}之间，因此

$$nAQ_1<AC<(n+1)AQ_1,$$
$$mAQ_1<AC_2<(m+1)AQ_1.$$

由此可得出：

$$\frac{n}{m+1}<\frac{AC}{AC_2}<\frac{n+1}{m}. \qquad (2)$$

由不等式（1）和（2），显然可见$\frac{AB}{AB_2}$和$\frac{AC}{AC_2}$之差必小于$\frac{n+1}{m}-\frac{n}{m+1}$，而$\frac{n+1}{m}-\frac{n}{m+1}=\frac{n+m+1}{m(m+1)}<\frac{2m+2}{m(m+1)}=\frac{2}{m}$，

因此，$\frac{AB}{AB_2}$和$\frac{AC}{AC_2}$之差不大于$\frac{2}{m}$。

如果截取的线段AP_1充分小，则m值必相当大，而$\frac{2}{m}$值必非常小，因此$\frac{AB}{AB_2}$和$\frac{AC}{AC_2}$之差则将特别小，其差可小至使

$\frac{AB}{AB_2}$与$\frac{AC}{AC_2}$相等。

如此可得：

$$\frac{AB}{AB_2}=\frac{AC}{AC_2},$$

因为$AB_2=A_1B_1$，而$AC_2=A_1C_1$，

故
$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1},$$

同理可证：

$$\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}.$$

定理得证。

相似三角形的其它判定法

定理12.2　如果在三角形ABC及三角形$A_1B_1C_1$中，

$$\angle A=\angle A_1 \text{和} \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}, \qquad (3)$$

则　$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$。

证明　作一个三角形$A_2B_2C_2$，使$A_2B_2=A_1B_1$，$\angle A_2=\angle A$，$\angle B_2=\angle B$。根据定理12.1，可得出：

$\triangle ABC\backsim\triangle A_2B_2C_2$，因此得出：

$$\frac{AB}{A_2B_2}=\frac{AC}{A_2C_2}, \qquad (4)$$

因为$A_2B_2=A_1B_1$，从等式（3）和（4）得出：　$A_2C_2=A_1C_1$。

现在证明$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle A_2B_2C_2$全等。在$\triangle A_1B_1C_1$和$\triangle A_2B_2C_2$中，$A_1B_1=A_2B_2$(作图的条件) $A_1C_1=A_2C_2$（前面已证），$\angle A_1=\angle A_2$　（因$\angle A=A_1$，　$\triangle ABC\backsim$

$\triangle A_2B_2C_2$）。

因为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 相似，而 $\triangle A_2B_2C_2 \cong \triangle A_1B_1C_1$，所以 $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$。定理得证。

定理12.3 如果在$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$中，

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}, \qquad (5)$$

则 $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$。

证明 作一个三角形 $A_2B_2C_2$，使 $A_2B_2=A_1B_1$，$A_2C_2=A_1C_1$，$\angle A_2=\angle A$。根据定理12.2，

得出：$\triangle ABC \backsim \triangle A_2B_2C_2$，

从而得出：

$$\frac{AC}{A_2C_2}=\frac{BC}{B_2C_2}. \qquad (6)$$

因为 $A_2C_2=A_1C_1$，故从等式（5）和（6）可得 $B_2C_2=B_1C_1$。现在根据全等三角形第三判定法，我们可得知$\triangle A_2B_2C_2$全等于$\triangle A_1B_1C_1$，因为$\triangle ABC \backsim \triangle A_2B_2C_2$，而 $\triangle A_2B_2C_2 \cong \triangle A_1B_1C_1$，所以 $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$。定理得证。

三角形内成比例的线段

定理12.4 任意直角三角形斜边上的高等于两条直角边在斜边上射影的几何平均数，而每一条直角边又等于斜边与这条直角边在斜边上射影的几何平均数。

证明 设 ABC 为已知的直角三角形，$\angle C$为直角(如图91)，CD为斜边AB上的高。因为$\angle CAD$与$\angle BCD$都是$\angle ABC$的余角，故$\angle CAD=\angle BCD$。根据定理12.1，得出直角三角形

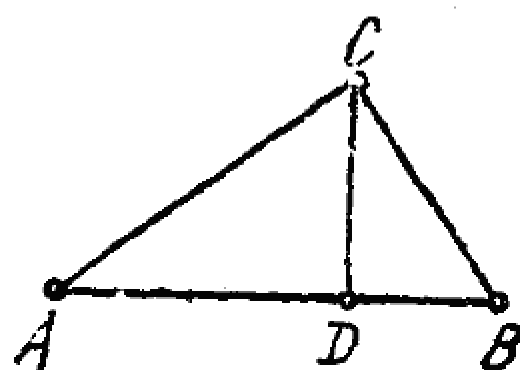


图 91

CAD与直角三角形BCD相似．由此得出：

$$\frac{CD}{BD}=\frac{AD}{CD}.$$

从而得出：$(CD)^2=AD\cdot BD$，即$CD=\sqrt{AD\cdot BD}$．定理的第一个结论得证。

因$\triangle BCD\backsim\triangle BAC$，所以

$$\frac{AB}{CB}=\frac{CB}{BD}.$$

由此得出：$(CB)^2=AB\cdot BD$，即$CB=\sqrt{AB\cdot BD}$．同理可证：$AC=\sqrt{AB\cdot AD}$．定理的第二个结论得证．

定理12.5　在三角形ABC中，角A的平分线AD将BC边分割成的线段与AB和AC边成比例，即

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{CD}.$$

证明　设ABC为已知三角形（如图92），AD为$\angle A$的平分线，从$\triangle ABC$的两顶点B、C分别向直线AD引垂线BE、CF，在$\triangle BED$和$\triangle CFD$中，$\angle CFD=\angle BED=90°$，而$\angle FDC=\angle EDB$（对顶角相等），所以$\triangle BED\backsim\triangle CFD$．

在$\triangle BAE$和$\triangle CAF$中，$\angle AEB=\angle AFC=90°$，而$\angle BAE=\angle CAF$（$AD$为$\angle BAC$的平分线），所以$\triangle BAE\backsim\triangle CAF$．

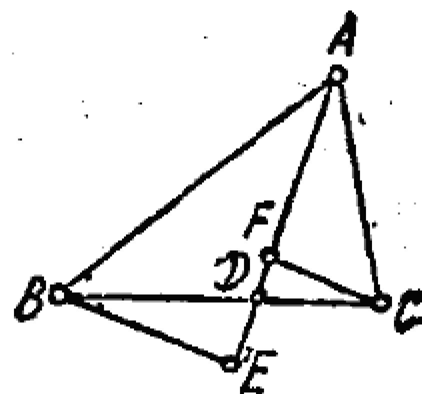


图　92

由于三角形BED和三角形CFD相似，可得：

$$\frac{BE}{CF}=\frac{BD}{CD},$$

由于三角形BAE和三角形CAF相似，可得：

$$\frac{BE}{CF}=\frac{AB}{AC}.$$

由上面两式可得出：

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}.$$

定理得证。

交弦定理和切割定理

定理12.6　两弦相交，各弦被交点所分成的两线段之积相等．就是说，如果两弦AB和CD相交于S点，则AS·BS＝CS·DS（这个定理叫交弦定理）。

证明　如图93，连结直线BD，对直线BD而言，点A和点C位于同一半平面内，即点S所在的半平面内。由此可知，A、C两点都在BD弦分割的两弧中的同一个弧上，圆周角$\angle DCB$和$\angle DAB$相等(同弧所对的圆周角相等)。同理我们可得$\angle ABC=\angle ADC$。根据定理12.1可判定，$\triangle ASD\backsim\triangle CSB$．由此可得：

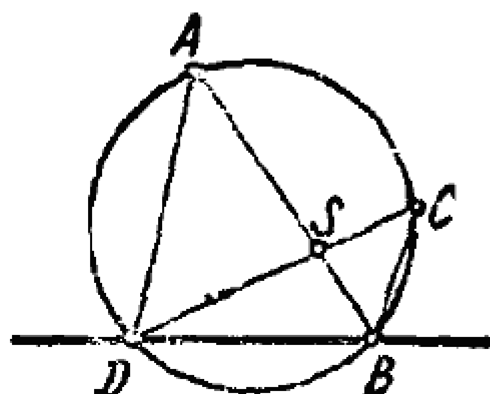


图　93

$$\frac{DS}{BS}=\frac{AS}{CS},$$

即　$AS\cdot BS=CS\cdot DS$。

定理得证。

定理12.7　割线两线段之积等于切线的平方．即：由圆外一点S作圆的一条割线和一条切线，割线交圆于A和B两点，切线切圆于一点C， 则

$AS \cdot BS=(CS)^2$（这个定理叫切割定理）。

证明 如图94，对切线 CS 而言，圆在同一半平面内，因而点 A 和 B 不能被点 S 分隔。为了明确起见，设点 B 在点 A 和点 S 之间（如图所示）。

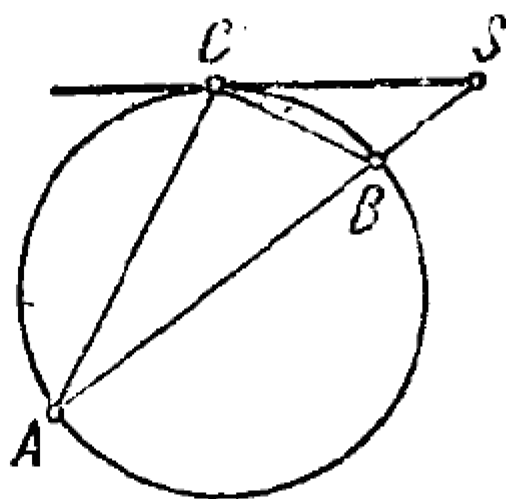


图 94

在$\triangle SAC$和$\triangle SCB$中，角 S 为公共角，$\angle CAB=\angle BCS$（都等于同一个圆心角的一半），所以 $\triangle SAC$ 和 $\triangle SCB$ 相似。

$$\frac{CS}{AS}=\frac{SB}{SC},$$

由此得出： $AS \cdot BS=(CS)^2$.

定理得证。

由定理12.7推论得出：从圆外一点到圆引诸割线，各割线全长和它在圆外部分之积相等（这个定理叫割线定理）。

直线和圆相交

定理12.8 已知一个圆，其圆心为O，半径为R，直线 a 与圆心的距离为 h 。如果 h>R，则直线 a 与圆不相交；如果 h=R，则直线 a 与圆相切；如果 h<R，则直线 a 与圆相交于两点.

证明 假如 $h>R$，则直线上任意点与圆心 O 的距离都大于 R，可见，直线上任意点都不可能在圆周上，即直线与圆不相交。

假如 $h=R$，从圆心向直线作一垂线，垂足必在圆周上。根据切线的定义，可得出：直线在这点与圆相切。

现在我们分析，当 $h<R$ 时的情况（如图95），作直线

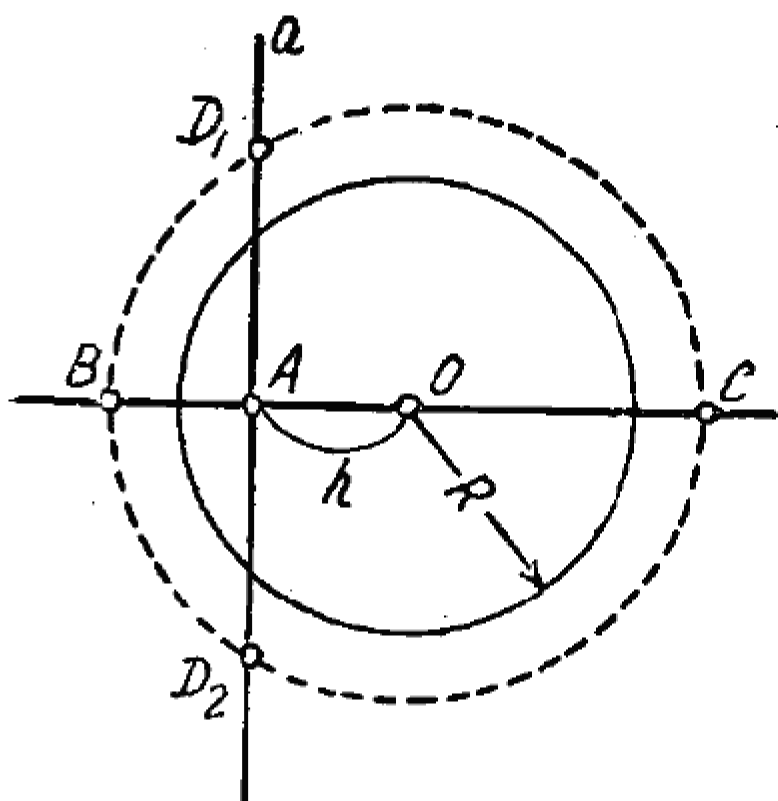


图 95

OA 的垂直线 a，在直线 a 上，以 A 点为端点截取线段 AD_1 和 AD_2，使线段 AD_1 和 AD_2 均等于 $\sqrt{R^2-h^2}$，因此 $OD_1=OD_2$。以 O 为圆心，以 $OD_1=OD_2$ 为半径作一圆，直线 a 与此圆交于 D_1 和 D_2 两点。

现在我们计算所作圆的半径。以 x 表示其半径，根据定理12.6得出：$AB\cdot AC=AD_1\cdot AD_2=R^2-h^2$。因为 $OA=h$，所以 $AB=x-h$，$AC=x+h$。因此得出：

$$(x-h)(x+h)=x^2-h^2=R^2-h^2,$$

即
$$x=R.$$

因此，所作的圆与已知圆完全重合，故已知圆与直线 a 相交于 D_1、D_2 两点。

除 D_1 及 D_2 两点外，直线 a 与已知圆不能再有其它交点。用反证法，假如还有一个交点，设为 P_1，则点 P_1 关于直径 BC 的对称点 P_2 也将位于圆上。由定理12.6可得 $AP_1\cdot AP_2=AD_1\cdot AD_2$。因为 $AD_1=AD_2$，$AP_1=AP_2$，故 $AP_1=AD_1$。这就是说，点 P_1 或与 D_1 重合，或与 D_2 重合。定理得证。

两个作图题

例题　已知三条线段 a、b、c，求作线段

$$x=\frac{bc}{a}.$$

解　从任一点 O 作两条不在一条直线上的射线 p 及 q

（如图96），在射线 p 上截取两线段：$OA=a$，$OB=b$；

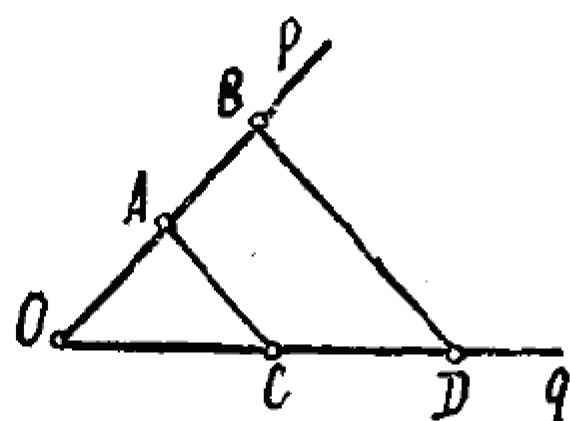


图 96

在射线 q 上截取线段 $OC=c$，连结直线 AC，再过 B 点作 AC 的平行线与射线 q 交于点 D。因为 $\triangle OAC \backsim \triangle OBD$，故可有

$$\frac{OD}{OC}=\frac{OB}{OA},$$

由此得出：

$$OD=\frac{OB\cdot OC}{OA}=\frac{bc}{a}.$$

例题　a、b 为两条已知线段，求作线段

$$x=\sqrt{ab}.$$

解　在任一直线 p 上取一点 C，以 C 点为端点在直线 p 上向 C 点的两侧截取线段 CA 和 CB，使 $CA=a$，$CB=b$（如图97），再以线段 AB 为直径作一圆，过点 C 作 AB 的垂线，垂线与圆交于 D_1 及 D_2 两点。因为 $CD_1=CD_2$，而 $CD_1\cdot CD_2=AC\cdot BC=ab$，所以线段 $CD_1=\sqrt{ab}$。

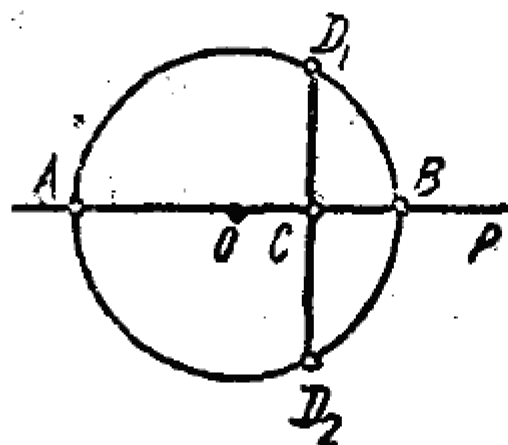


图 97

相似图形　同位相似（简称位似）

相似变换指的是平面自身的相互单值映射，在映射时，平面中的任意两点 X 和 Y 分别与平面中的 X_1 及 Y_1 相对应，并且比值 $\frac{XY}{X_1Y_1}$ 为常数，即 $\frac{XY}{X_1Y_1}$ 的比值不因所取点 X 及 Y 的

变化而变化，这个比值叫**相似系数**。

设 F 为某一图形，当点 X 描出图形 F 时，按相似变换，X 的对应点 X_1 描出图形 F_1，F 与 F_1 叫**相似图形**。

设 O 为平面上任意点，对于平面上每一点 X，我们按下述规则提出一点 X_1 与之对应。如果 X 重合于 O，那么取 X_1 为 O；如果 X 异于 O，那么取 X_1 位于射线 OX 上，并距 O 点 $k\cdot OX$，即 $OX_1=k\cdot OX$。如果点 X 与点 X_1 在平面上以这种方式相对应的话，那么这种平面的自身映射叫做**同位相似**，点 O 叫**位似中心**，而系数 k 叫**位似系数**。

定理12.9 位似是一种相似变换。

证明 设 X 及 Y 是平面上与点 O 不在一条直线上的任意两点（如图98），在 $\triangle OXY$ 和 $\triangle OX_1Y_1$ 中，$\angle O$ 是公共角，而

$$\frac{OX_1}{XO}=\frac{OY_1}{OY}=k,$$

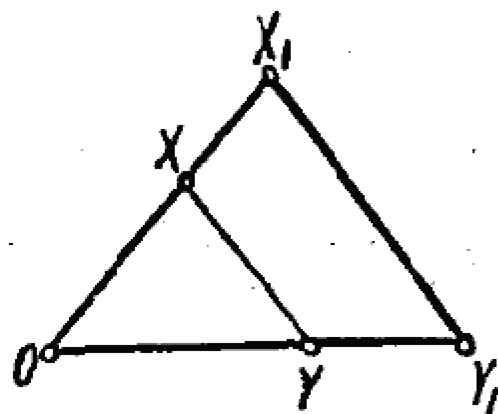


图 98

所以 $\triangle OXY\backsim\triangle OX_1Y_1$。
由于两个三角形相似可得出：无论如何取点 X 和 Y，比值 $\frac{X_1Y_1}{XY}$ 总等于一个常数 k。当点 O、X、Y 在同一条直线上时，我们仍可得出同样的结论。建议读者自己证明。

相似变换与§10中运动相同，具有如下两条性质：

1．直线的相似变换仍为直线，射线的相似变换仍为射线，线段的相似变换则仍为线段。

2．相似变换保持两条射线的夹角不变。

复习题及练习题

1．什么样的三角形叫作相似三角形？

2．相似三角形的基本判定法是什么？证明这个相似判定法。

3．证明：如果在$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$中，$\angle A=\angle A_1$，而

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1},$$

那么$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$。

4．证明：如果一个三角形的三条边和另一个三角形的三条边成比例，则两个三角形相似。

5．叙述并证明：直角三角形中成比例线段定理。

6．证明三角形顶角平分线将底边分割的线段与另两边成比例。

7．叙述并证明关于交弦线段乘积的定理。

8．由圆外一点，引一条切线和任意一条割线，试证明：割线全长与它在圆外部分的乘积等于切线的平方。

9．已知一圆的圆心为O，半径为R，点S与圆心的距离小于R，试证明：过点S的任意直线与已知圆都有两个交点。

10．什么叫相似变换？什么样的图形叫做相似图形？试证明圆的相似图形仍是一个圆。

11．什么叫做同位相似（即位似）？什么叫位似中心？什么叫位似系数？

12．证明位似是一种相似变换。

13．如果$\triangle ABC$和$\triangle BCA$相似，试问$\triangle ABC$各角为多少度？

14．证明：如果两个等腰三角形的顶角对应相等，那么这两个三角形相似。

15．等腰三角形的顶角为36°，证明：这个等腰三角形一底角的平分线把这三角形分成两个，其中一个和原三角形相似。

16．直角三角形的直角平分线把斜边分成两条线段，而线段的比是$m:n$，试证：从直角顶点到斜边上的高把斜边分成两条线段的比是$m^2:n^2$。

17．已知三角形ABC，三角形$\angle C$外角的平分线与AB边延长线交于D点，证明：

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}.$$

18．设点C到已知点A、B的距离之比是一个不等于1的常数，证明C点的轨迹是一个圆、（提示：$\triangle ABC$中，顶点C的内、外角平分线互相垂直，无论如何取满足条件的C点，在C点的内、外角平分线与直线AB总交于两个固定点）。

19．作线段

$$x=\frac{abc}{de},$$

其中：a、b、c、d、e 是已知的线段．

20．作一条等于$\sqrt{a^2-b^2}$的线段，其中a和b是已知的线段，但$a>b$。

21．用几何方法证明不等式：

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}.$$

22．凸四边形对角线的交点把对角线各分成两个线段，如果被交点所分成两线段的乘积相等，证明这个四边形内接

于圆。

23. 已知两条相交直线，试求到这两条直线距离的比是一个常数的点的轨迹。

24. 作一个三角形具有已知的周长并和一个已知三角形相似。

25. 已知线段：

$$a=\frac{x+y}{2},\quad b=\sqrt{xy}\ (a>b),$$

求作线段 x 和 y。

26. 试作三角形 ABC 内接正方形，使正方形的一边位于 AB 边上，并且正方形的另外两个顶点各在 AC 边和 BC 边上。

27. 求作一圆使过一个已知点并与两条已知相交直线相切。

§13. 勾股定理及其应用

勾股定理（即毕达哥拉定理）

定理13.1 直角三角形斜边的平方等于两条直角边的平方和。

证明 设 ABC 是一个直角三角形，$\angle C$ 是直角（如图99），由点 C 向斜边作一条垂线 CD，首先证明垂足 D 位于点 A 和点 B 之间。

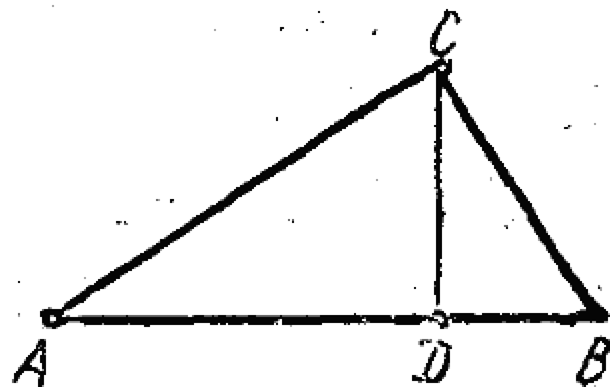


图 99

假设点 B 确实位于点 A 和点 D 之间，此时相邻的两个内角 $\angle ABC$、$\angle DBC$ 应是两个锐角。这显然是不可能的。同理可证，点 A 也不可能位于点 B 和点 D 之间。由此可知，点 D 必位于

点 A 和点 B 之间。现在根据定理12.4可知：

$$AC^2=AD\cdot AB,$$
$$BC^2=BD\cdot AB.$$

两等式相加可得：

$$AC^2+BC^2=AB(AD+DB).$$

因为点 D 位于点 A 和 B 之间，所以 $AD+DB=AB$。因此可得：

$$AC^2+BC^2=AB^2.$$

定理得证。

定理13.1叫做勾股定理。

斜三角形各边之间的关系 非直角三角形都叫做**斜三角形**。

定理13.2 在任意的斜三角形中，钝角对边的平方，等于其他两边平方的和，加上两边中的一边与另一边在它上面的射影的乘积的两倍。

证明 设 ABC 是一个已知的钝角三角形，$\angle C$ 为钝角（如图100），从顶点 A 向 BC 边作垂线 AD。首先证明，点 C 位于点 B 和点 D 之间。事实上，如果点 C 不在点 B 和点 D 之间，则直角三角形 ADC 中的 $\angle ACD$ 是一个钝角，这显然是不可能的。因此，点 C 位于点 B 和点 D 之间。

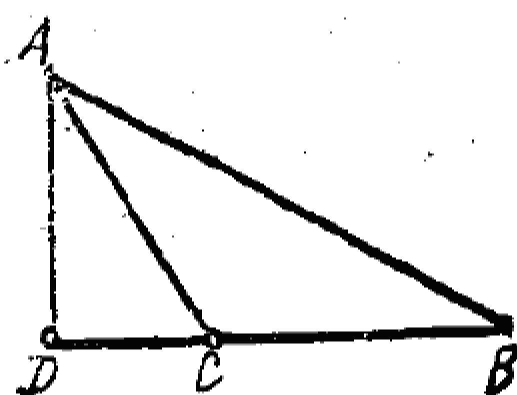


图 100

应用勾股定理于直角三角形 ADB 及 ADC，可得：

$$AB^2=AD^2+BD^2,$$
$$AC^2=AD^2+DC^2.$$

两等式相减，可得：

$$AB^2-AC^2=BD^2-DC^2.$$

因为点C位于点B和点D之间，故$BD=BC+DC$。将$BD^2=(BC+DC)^2$代入已得出的等式中，化简即得：

$$AB^2=AC^2+BC^2+2BC\cdot CD.$$

定理得证。

定理13.3　在任意的斜三角形中，锐角对边的平方，等于其它两边平方的和，减去两边中一边与另一边在它上面的射影的乘积的两倍。

证明　设ABC是一个已知的三角形，$\angle C$是一个锐角（如图101），过A点向BC边作垂线AD，首先证明，点C不分隔点B及点D。假如事实与此相反，即点C位于点B和点D之间，则在直角三角中$\angle ACD$的外角应是一个锐角。这显然是不可能的。因此，

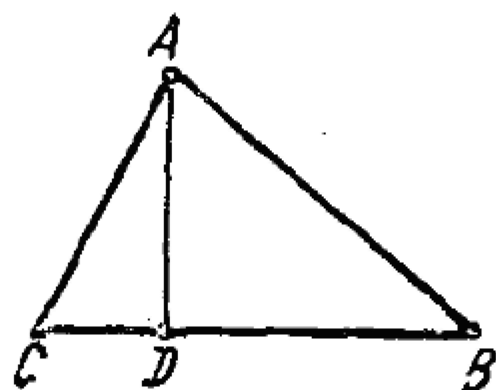


图　101

或者D点位于C、B点之间，或者B点位于C、D点之间。为了明确起见，设点D位于点C和点B之间（如图101所示）。应用勾股定理于直角三角形ADC和ADB，可得：

$$AB^2=BD^2+AD^2,$$

$$AC^2=CD^2+AD^2.$$

两等式相减，可得：

$$AB^2-AC^2=BD^2-CD^2.$$

因为点D位于点B和点C之间，则$BC=BD+CD$，即$BD=BC-CD$，将$BD^2=(BC-CD)^2$代入已得的等式中，化简即得：

$$AB^2=AC^2+BC^2-2BC\cdot CD.$$

假如点B位于点C和点D之间，证法相同。定理得证。

平行四边形各边与对角线之间的关系

定理13.4　在任意平行四边形中，两条对角线平方的和等于平行四边形各边平方的和。

证明　设$ABCD$是一个平行四边形，AC和BD是对角线，假如平行四边形是一个矩形（如图102—左），则根据勾股定理可得：

$$AC^2=AD^2+DC^2,$$
$$BD^2=BC^2+DC^2.$$

两个等式相加，并将$DC=AB$代入即得出：

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2.$$

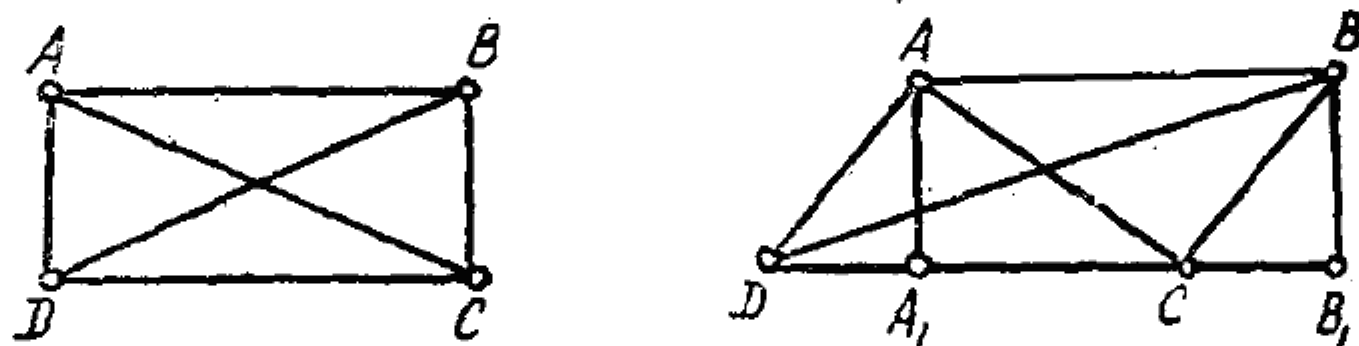


图　102

假如平行四边形$ABCD$不是矩形（如图102—右），从顶点A和B向CD边引垂线AA_1和BB_1，因三角形ADA_1和三角形BCB_1全等，可得$DA_1=CB_1$。因平行线AD和BC被直线DC所截，同旁内角的和等于180°（即$\angle ADC+\angle BCD=180°$），所以其中有一个角是锐角，另一个角必是钝角。这里明确地设$\angle ADC$是一个锐角，则$\angle BCD$是一个钝角（如图102—右所示）。

应用定理13.2于三角形BCD，并应用定理13.3于三角形ADC，可得：

$$BD^2=BC^2+CD^2+2DC\cdot CB_1,$$
$$AC^2=AD^2+CD^2-2DC\cdot DA_1.$$

两等式相加，并将$CB_1=DA_1$，$AB=CD$代入等式，即得出：

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2.$$

定理得证。

由定理13.4可推知：**正方形的对角线等于它的一边乘以$\sqrt{2}$**。实际上，如果正方形的一边为a，而它的对角线为b，根据定理13.4可有$2b^2=4a^2$。由此可得出：$b=a\sqrt{2}$。

已知三边的三角形 我们已经知道，三角形两边之和必大于第三边。很自然会提出以下问题：如果三数中任意两数之和大于第三数，那么这三个数是否能作为某三角形三边之长？下面的定理对这个问题给予了肯定的回答。

定理13.5 不管 a、b、c 是三个什么样的（正）数，只要这三数中任意两数之和大于第三个数，那么必存在以 a、b、c 为边长的三角形。

证明 我们把a、b、c三数按递增顺序排列，为了明确起见，设$a \leqslant b \leqslant c$，令

$$a_1=\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}.$$

因为$c \geqslant b$，故$a_1>0$。又数a_1小于a，实际上：

$$a-a_1=a-\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}=\frac{b^2-(c-a)^2}{2c},$$

因为$a+b>c$，故$b>c-a>0$，由此可得$b^2>(c-a)^2$，因此，$a>a_1$。

现在用下列方法作$\triangle ABC$。作线段AB等于c（如图103），在射线AB上，以点B为端点截取线段BD等于a_1，从点D作AB的垂线DC，使等于$\sqrt{a^2-a_1^2}$，我们可以证明$\triangle ABC$的三条边就

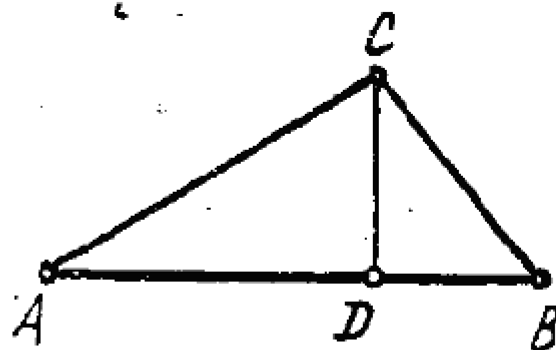


图 103

是a、b、c。

事实上，AB边等于c.应用勾股定理，三角形BDC，可得：

$$BC^2=BD^2+CD^2=a_1^2+(\sqrt{a^2-a_1^2})^2=a^2,$$

即$BC=a$。应用定理13.3于三角形ABC，可得：

$$AC^2=a^2+c^2-2ca_1=b^2,$$

即 $AC=b$。 定理得证。

两圆的位置关系 定理13.5使我们有充分条件，根据两圆的半径和圆心的距离，说明两圆的各种位置关系。也就是说，我们要证明下面的定理。

定理13.6 设已知两个不同的圆，其圆心为O_1和O_2，其半径为R_1和R_2，$R_1 \leqslant R_2$，两圆圆心的距离为d. 则

1）如果

$$R_1+R_2<d, \quad 或 \quad R_2-R_1>d,$$

那么两圆不相交，即没有公共点。

2）如果

$$R_1+R_2=d, \quad 或 \quad R_2-R_1=d,$$

那么两圆只有一个公共点，两圆于此点相切，即两圆有一条公共的切线。

3）如果

$$R_1+R_2>d, \quad 并且 \quad R_2-R_1<d,$$

那么两圆相交于两点。

证明 首先证明定理的第一个结论。用反证法，假设两个圆相交，并且有一个公共点A。如点O_1、O_2和A不在一条直线上，则$O_1A+O_2A>O_1O_2$，即

$$R_1+R_2>d,$$

而这与条件$R_1+R_2<d$矛盾。

如果点O_1、O_2、A在一条直线上，并且点A位于点O_1与O_2之间，则$O_1A+AO_2=O_1O_2$，即$R_1+R_2=d$，而这与条件$R_1+R_2<d$矛盾；如果点O_1在点A和O_2之间，则$O_1A+O_1O_2=AO_2$，即$R_1+d=R_2$或$R_2-R_1=d$，这与条件$R_2-R_1>d$矛盾；最后，如果点O_2位于A和O_1之间，则$O_2A+O_2O_1=AO_1$，即$R_2+d=R_1$，但这是不可能的，因为$R_1\leqslant R_2$。因此，根据上述分析情况，两圆不可能有公共点，即不可能相交（如图104）。

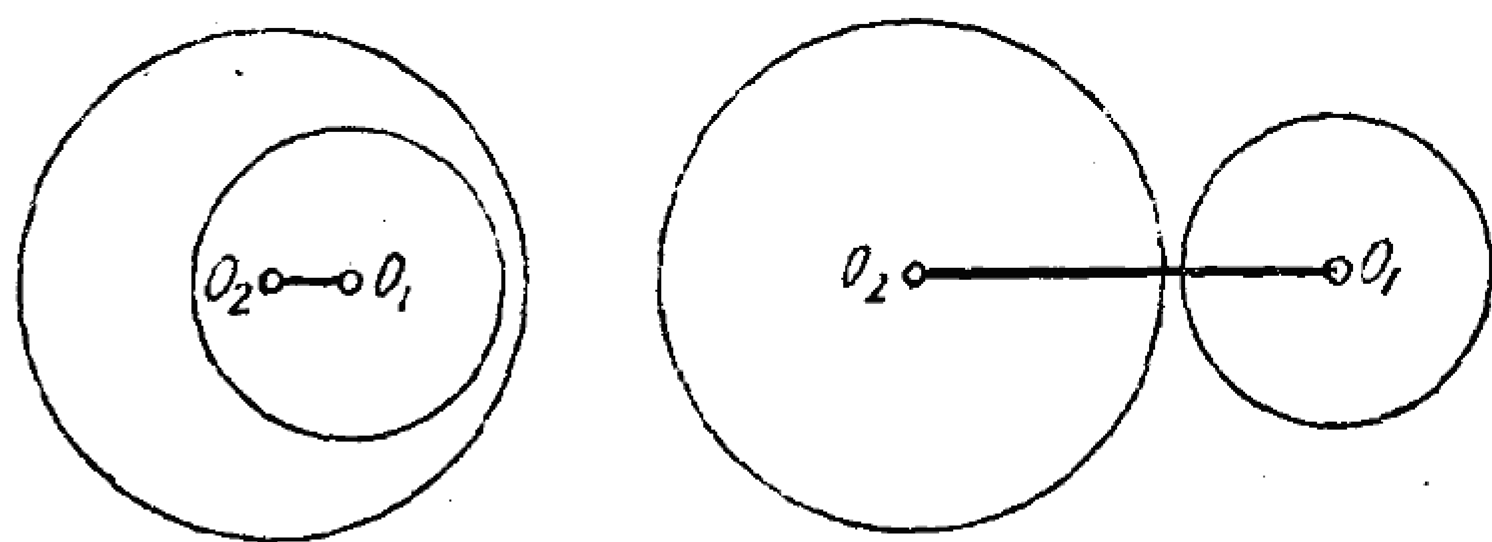


图 104

现在证明定理的第二个结论。这里象第一种情况那样，我们断定两圆不可能有不在直线O_1O_2上的公共点A。两圆有一个公共点A位于直线O_1O_2上，并且两圆的位置有两种可能：$R_2-R_1=d$（如图105左）；$R_1+R_2=d$（如图105右），两圆在它们的公共点A上有一条垂直于直线O_1O_2的

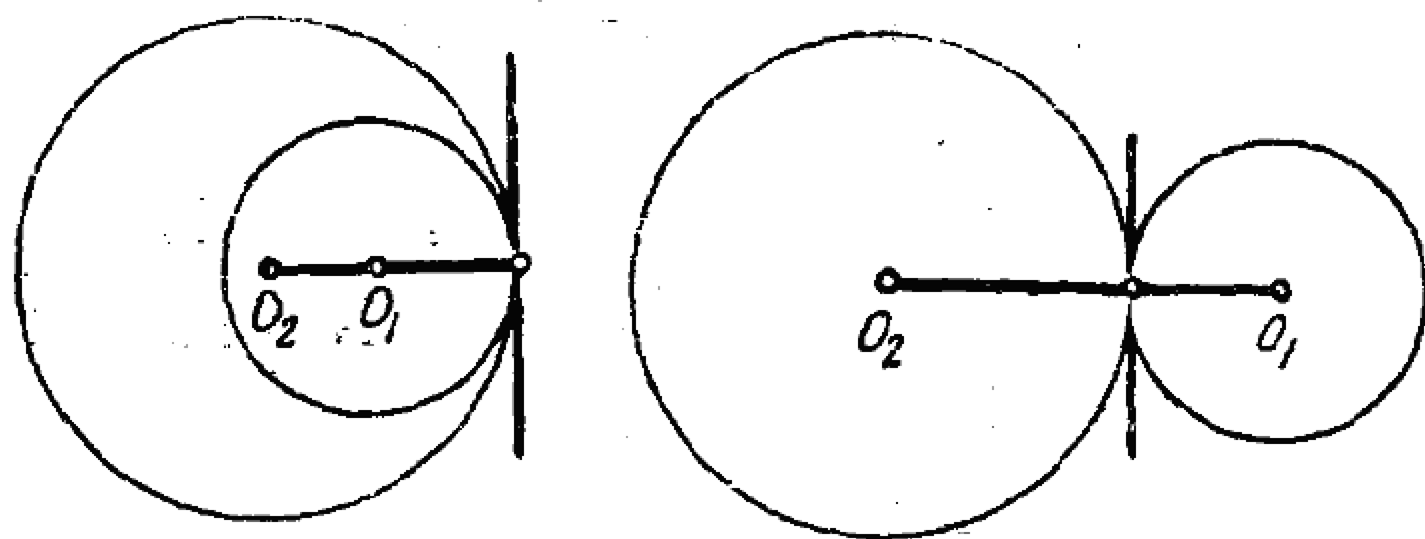


图 105

公切线。

最后，证明定理的第三结论。题设 $R_1+R_2>d$；又$R_2-R_1<d$，故 $R_1+d>R_2$；又题设$R_2\geqslant R_1$，故$R_2+d>R_1$。总之，R_1、R_2、d 三数中任意二数之和大于第三数。从上述我们发现以 R_1、R_2 和d 为三边可作一个三角形，我们可用证明定理13.5的方法作出这三角形。取线段 O_1O_2 等于 d，我们再按 $O_1A_1=R_1$，$O_2A_1=R_2$作出第三顶点A_1，既得点A_1，再作A_1关于直线O_1O_2的对称点A_2。既然已作 $O_1A_1=R_1$，$O_2A_1=R_2$，又按对称点的性质，$O_1A_1=O_1A_2$，$O_2A_1=O_2A_2$，所以A_1及A_2均位于已知的两圆上，故 A_1及A_2 两点是两已知圆的交点（如图106）。

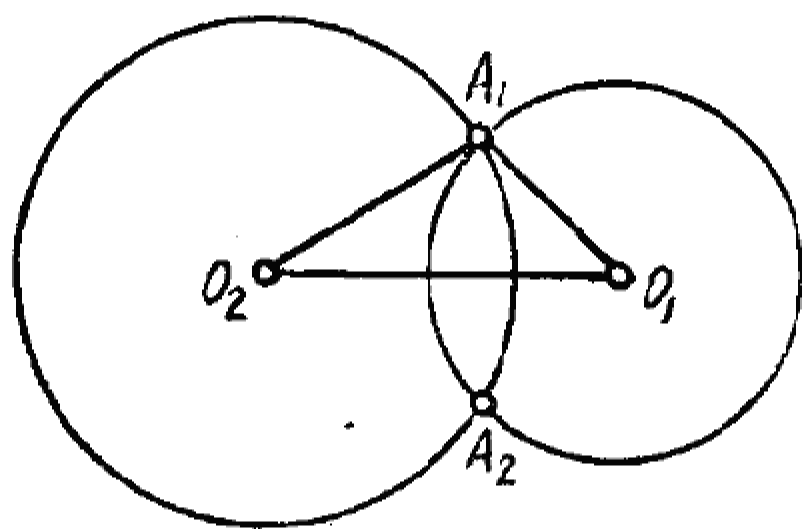


图 106

现在证明，除点 A_1 和 A_2 之外，两圆再没有其它交点。假设两圆还有第三个交点A，根据全等三角形第三判定法，可得出：$\triangle O_1O_2A_1\cong\triangle O_1O_2A$。为了明确起见，设$A$点，对直线 O_1O_2 而言，与点A_1 位于同一半平面内，由两三角形 $O_1O_2A_1$ 及 O_1O_2A 的全等可得出：$\angle O_2O_1A=\angle O_2O_1A_1$。由此得出：射线$O_1A$与射线 O_1A_1重合，从而可得$O_1A=O_1A_1=R_1$，所以点A与A_1相重合。定理得证。

两个例题

例题　已知三角形ABC，试通过三角形的三条边，求自顶点C所作的中线、角的平分线和高。

解　先求三角形AB边上的中线(如图107)，设O 为 AB

边上的中点。作C点关于O的对称点D，$OD=OC$，$ABCD$是一个平行四边形。应用定理13.4于该平行四边形可得：

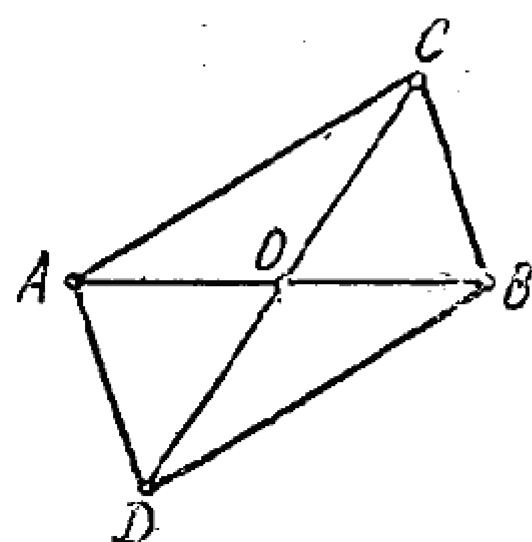


图 107

$$AB^2+(2\cdot OC)^2=2AC^2+2BC^2.$$

由此即可求出中线OC（如图107）。

现在求$\angle C$的平分线CO（如图108）。点O是$\angle C$平分线与底边AB的交点，CO将AB边分成两个线段AO和OB，根据定理12.5可知AO、OB与AC、BC成比例。这就使得我们能根据已知的三边AB、AC和BC求出AO及OB，具体结果从略。应用定理13.2及13.3于三角形ABC及AOC，可得出：

$$BC^2=AC^2+AB^2\pm 2AB\cdot AD,$$

$$OC^2=AC^2+AO^2\pm 2AO\cdot AD.$$

以AO乘第一个等式，以AB乘第二个等式，然后再相减，则可得出只包括一个未知数OC（即$\angle C$平分线）的方程，由此方程即可求出角平分线CO。

现在求高CD（如图108）。首先用定理13.2或13.3求线

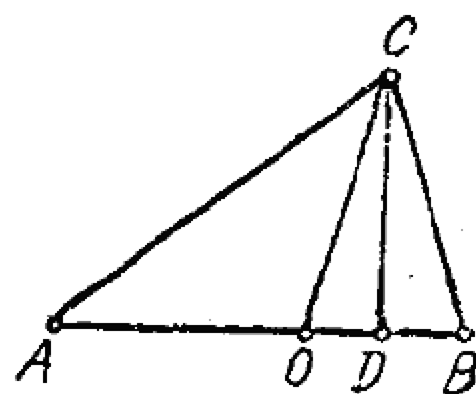


图 108

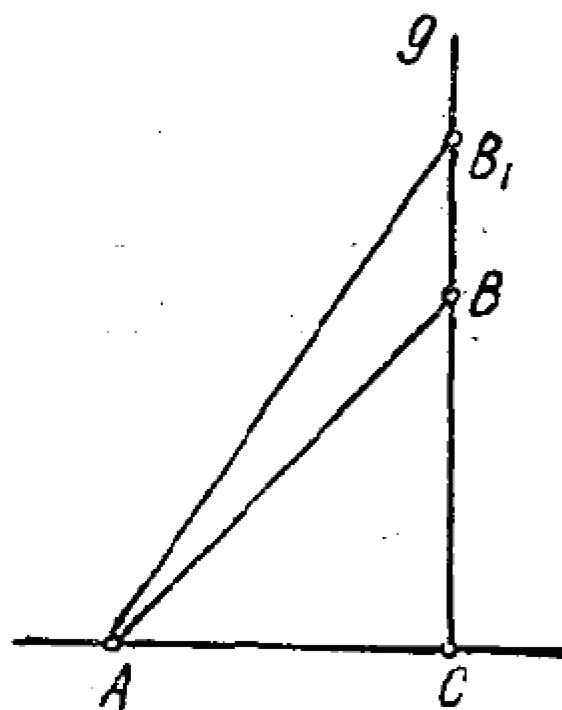


图 109

段AD，然后由直角三角形ADC即可求得高CD。

例题　已知线段a和b，求作线段$\sqrt{a^2+b^2}$和$\sqrt{a^2-b^2}$（其中a>b）。

解　作任一条直线，在直线上截取线段AC，使$AC=b$（如图109），过C点作直线g垂直于AC，在直线g上，以C为端点截取线段CB_1，使$CB_1=a$，由勾股定理即得：

$$AB_1=\sqrt{a^2+b^2}.$$

为了作线段$\sqrt{a^2-b^2}$，以点A为圆心，以a为半径作一圆，圆与直线g交于点B，根据勾股定理即得：

$$CB=\sqrt{a^2-b^2}.$$

复习题及练习题

1. 叙述并证明勾股定理。
2. 叙述关于斜三角形钝角（或锐角）对边的平方的定理，并证明之。
3. 证明平行四边形两条对角线平方的和等于平行四边形各边平方的和。
4. 试证：如果线段a、b、c满足下列不等式：

   $$a+b>c,\quad a+c>b,\quad b+c>a,$$

   则必有一个三边各等于a、b、c的三角形。
5. 已知两圆的半径分别为R_1和R_2；$R_1\leqslant R_2$，又两圆的圆心距为d，试问两圆的相互位置？叙述并证明有关定理。
6. 已知线段a和b，求作线段$\sqrt{a^2+b^2}$和线段$\sqrt{a^2-b^2}$（其中$a>b$）。
7. 如果直角三角形两条直角边都等于$1cm$，试问其斜边的

长度为多少cm？

8. 如果等边三角形边长为 $1cm$，试问这三角形的高等于多少cm？

9. 如果等边三角形边长为 $1cm$，求其内切圆和外接圆的半径。

10. 证明：在三角形ABC内，如果$AB^2<AC^2+CB^2$，则$\angle C$为一个锐角；如果$AB^2>AC^2+CB^2$，则$\angle C$为一个钝角。

11. 证明：到已知两点A和B的距离平方和为常数的点的轨迹，是一个以线段AB的中点为圆心的圆。

12. 证明：到已知两点A和B的距离平方差为常数的点的轨迹，是一条与AB垂直的直线。

13. 证明：同圆上的弦，大弦的圆心距（从圆心到弦上的垂线长）小于小弦的圆心距。

14. 试用三角形三边求这三角形中线。

15. 在$\triangle ABC$中，D点是$\angle C$的平分线与底边AB的交点，证明下列等式：

$$CD^2=AC\cdot BC-AD\cdot BD.$$

16. a、b、c为三角形的三条边，h_a为a边上的高，试证高h_a的公式：

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

（式中p为三角形的半周长，即$p=\frac{a+b+c}{2}$）。

17. 等腰三角形顶角为36°，两腰为 $1cm$，求其底边长。（提示：参照§12中复习题15。）

§14. 三角函数

三角函数的定义 以一个单位长为半径作一个半圆（如图110），在半圆周上取任意一点A，连结AO，$\angle AOB$用α表示，从A点作AD垂直于直径BC，线段AD的长度叫做α角的**正弦**。α角的正弦记作$\sin\alpha$。根据定义可知$\sin 0^\circ=0$，$\sin 180^\circ=0$。

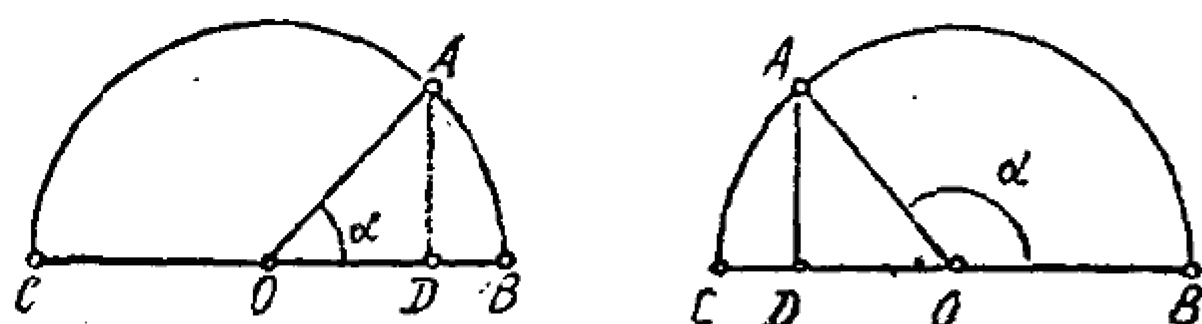


图 110

现在确定角的**余弦**概念。α角的余弦记作$\cos\alpha$。如果α角是一个锐角，则$\cos\alpha$等于线段OD的长度（如图110—左）；如果α角是一个钝角，则$\cos\alpha$是一个负数，其绝对值等于线段OD的长度（如图110—右）。根据定义可知$\cos 0^\circ=1$，$\cos 90^\circ=0$，$\cos 180^\circ=-1$。

$\sin\alpha$与$\cos\alpha$之比叫做α角的**正切**，α角的正切记作$\mathrm{tg}\alpha$：

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

当$\alpha=90^\circ$时，α的正切没有意义。

$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\mathrm{tg}\alpha$都叫做α角的三角函数。

定理14.1 对于任意角α，都有

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

证明 当$\alpha=0^\circ$、90°、180°时，将α角的正弦和余弦值代入，可立刻证明这个等式成立。

如α角是一个锐角，应用勾股定理于三角形ODA（图110—左），可立刻得到所要证的等式。如α角为钝角，同样应用勾股定理于三角形ODA（图110—右）也得出所要证的等式。

诱导公式 角$90°-\alpha$和$180°-\alpha$的三角函数和α的三角函数之间成立一定的关系式，这些关系式叫**诱导公式**。

定理14.2 如果α是一个锐角，则：

$$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(90°-\alpha)=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}.$$

证明 （如图111）设$\angle AOB$等于α，$\angle A_1OB$等于$90°-\alpha$，在直角三角形ODA和A_1D_1O中，两个斜边OA和OA_1都是圆的半径，$OA=OA_1$，$\angle AOD$及$\angle OA_1D$均等于α，所以$\triangle ODA\cong\triangle A_1D_1O$，$A_1D_1=OD$，$OD_1=AD$，即

$$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha.$$

以第二式除第一式即可得出所要证的第三式。定理得证。

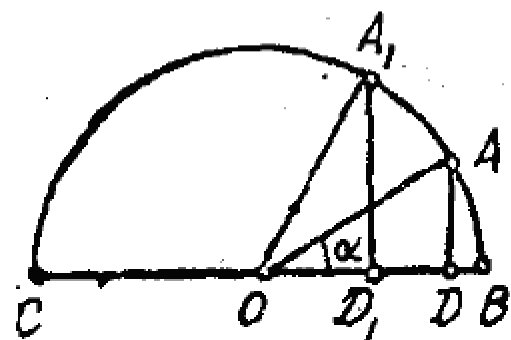


图 111

定理14.3 对任意α，都有

$$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha.$$

证明 当$\alpha=0°$、$90°$、$180°$时，以相应的正弦和余弦值代入公式，即可证明这两等式必成立。现在研究一般情况。

设 $\angle AOB$等于α，$\angle A_1OB$等于$180°-\alpha$（如图112），因为$\triangle OAD\cong\triangle OA_1D_1$，所以$AD=A_1D_1$，即$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$。

如果α不等于$90°$，那么在两角α及$180°-\alpha$中一个是锐角，而另一个是钝角。因此，$\cos\alpha$及$\cos(180°-\alpha)$，具有相反的符号，因为$OD=OD_1$，故$\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$。定理得证。

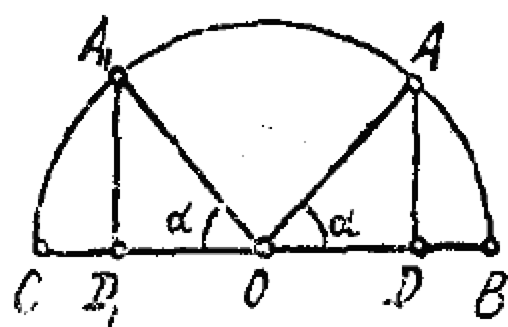


图 112

直角三角形中，边和角之间的关系

定理14.4 在C为直角的直角三角形ABC中成立下列关系：

$$\mathbf{BC=AB\cdot\sin A,}$$
$$\mathbf{AC=AB\cdot\cos A,}$$
$$\mathbf{BC=AC\cdot tg A.}$$

证明 （如图113）在射线AB上截取线段AB_1，使$AB_1=1$，过点B_1向直线AC上引垂线B_1C_1，根据正弦和余弦定义，得出：

$$\sin A=B_1C_1,$$
$$\cos A=AC_1.$$

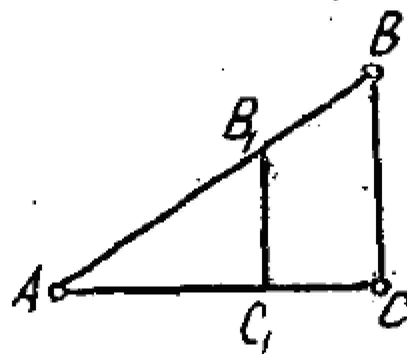


图 113

在$\triangle AB_1C_1$和$\triangle ABC$中，$\angle A$是公共角，$\angle C$和$\angle C_1$都是直角，所以$\triangle AB_1C_1\backsim\triangle ABC$：由此得出。

$$\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AB}{1},\quad \frac{AC}{AC_1}=\frac{AB}{1},\quad \frac{BC}{AC}=\frac{B_1C_1}{AC_1}.$$

把$B_1C_1=\sin A$，$AC_1=\cos A$代入上面等式中，可得出：

$$BC=AB\cdot\sin A,$$
$$AC=AB\cdot\cos A,$$
$$BC=AC\cdot tg A.$$

定理得证。

定理14.5

$$\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \operatorname{tg} 45^\circ=1,$$

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2},\ \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{tg} 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

证明 作直角三角形 ABC，使 $\angle C$ 为直角，$\angle A$ 等于 45°（如图114）。在这三角形中，$\angle B$ 也等于 45°，由此可知：$\triangle ABC$ 是一个等腰三角形，$AC=BC$。根据勾股定理得出：

$$AB^2=AC^2+BC^2=2BC^2=2AC^2.$$

由此可得：

$$\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

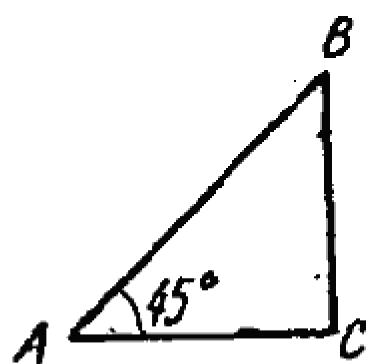


图 114

所以 $\operatorname{tg} 45^\circ=1$。

现在作一个等边三角形 ABC（如图115），在这三角形中，各角均相等，因此各角都等于 60°。作三角形 AC 边上的中线 BD，BD 既是 $\angle B$ 的平分线，又是三角形 AC 边上的高。因此，在 $\triangle ABD$ 中，$\angle ADB$ 是直角，而 $\angle ABD$ 等于 30°，因为 $AD=\frac{AC}{2}$，故 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$。根据定理 14.1 可得出：

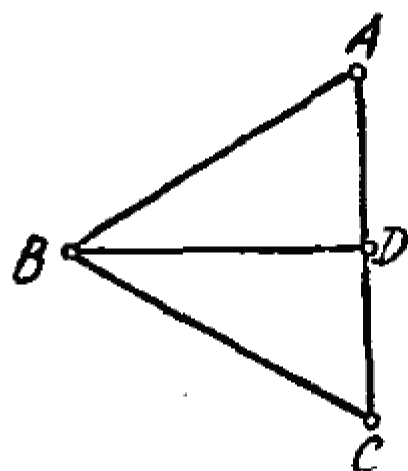


图 115

$$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.\ 从而可得：\operatorname{tg} 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

诱导公式使我们可用30°及45°的正弦、余弦和正切求出60°、120°、135°和150°等角的正弦、余弦和正切。

锐角的正弦、余弦及正切汇编成专用表，利用这些表可查找已知角度的正弦、余弦和正切；反之，已知正弦、余弦和正切，可查找和它们相应的角度。

已知一直角三角形的两条直角边、或斜边和一条直角边、或一个锐角和一条直角边、或一个锐角和斜边，根据定理14.4，并借助于表的帮助，可以求出该直角三角形的各边与各角。

余弦定理

定理14.6　在任意三角形ABC中，都有

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot \cos C.$$

证明　如果$\angle C=90°$，则因$\cos 90°=0$，所以根据勾股定理可得出这个定理的结论。

设$\angle C$是一个锐角（请看图101），根据定理13.3，可得出：

$$AB^2=AC^2+BC^2-2BC\cdot CD.$$

应用定理14.4于三角形ACD，可有：

$$CD=AC\cdot\cos C,$$

由此得出：

$$AB^2=AC^2+BC^2-2BC\cdot AC\cdot\cos C.$$

如果$\angle C$是一个钝角（请看图100），根据定理13.2，可有：

$$AB^2=AC^2+BC^2+2BC\cdot CD.$$

应用定理14.4于三角形ADC，可有：

$$CD = AC \cdot \cos(\angle ACD).$$

但角ACD与三角形ABC的角C互补成180°，故按定理14.3可有：

$$\cos(\angle ACD) = -\cos C,$$

而 $AC \cdot \cos C = -CD$,

因此，在钝角的情况下也有：

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos C.$$

定理得证。

正弦定理

定理14.7 在任意三角形ABC中，成立

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin C}{AB}.$$

证明 作三角形ABC的外接圆。过点B作直径BB_1，点B_1是点B关于圆心的对称点（如图116）。

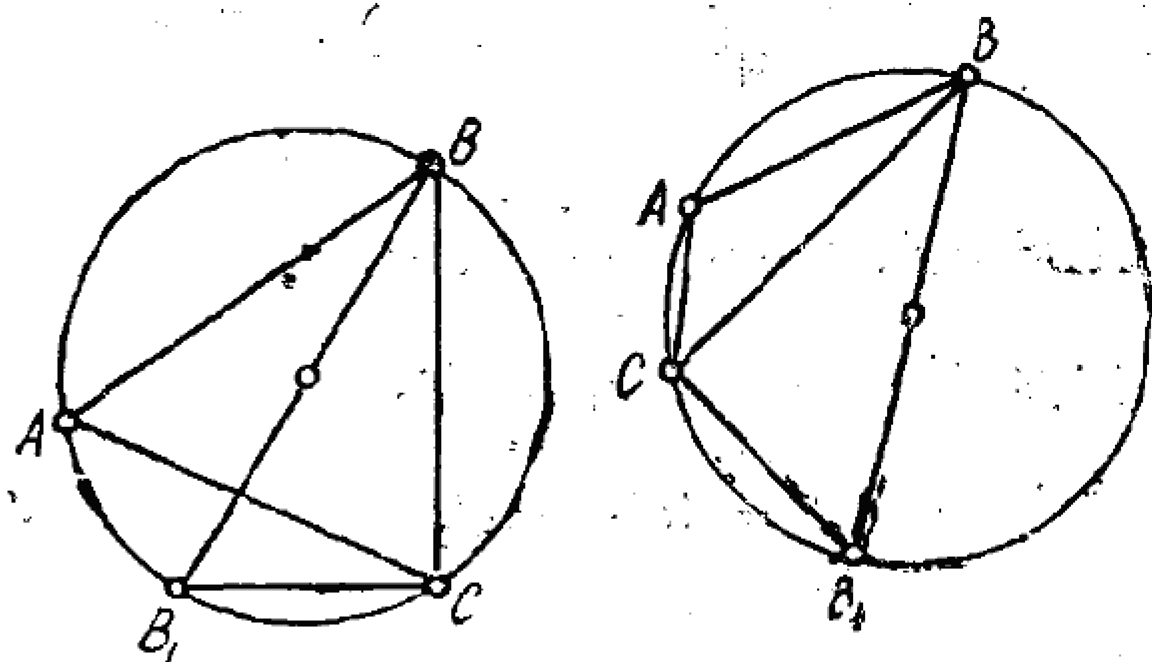


图 116

对直线BC而言，如果点A和点B_1在同一侧（如图116—左），则$\angle BB_1C$与$\angle BAC$相等（同弧$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角相等）。对直线BC而言，如果点A和点B_1在不同的两侧（如图116—右），则$\angle BB_1C$与$\angle BAC$互补成180°。

（$\angle BB_1C$所对的弧$\overset{\frown}{CAB}$与$\angle ABC$所对的弧$\overset{\frown}{BB_1C}$之和是一个圆），在上述两种情况下，都可得出：

$$\sin B_1=\sin A.$$

由此可得：$BC=2R\sin A$。

同理可证：$AB=2R\sin C$，

且 $AC=2R\sin B$。

由所得三个等式，可得出：

$$\frac{\sin A}{BC}=\frac{\sin B}{AC}=\frac{\sin C}{AB}=\frac{1}{2R}.$$

定理得证。

如果已知三角形三个元素（即三角形的三条边、或两边及所夹的角、或两角一边），那么，应用余弦定理及正弦定理，我们能求出三角形的全部元素，即三角形所有的边和角。

复习题及练习题

1. 说明三角函数$\sin\alpha$、$\cos\alpha$和$\mathrm{tg}\alpha$的定义。
2. 证明定理：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$。
3. 证明下列诱导公式：

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(90^\circ-\alpha)=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha},$$

$$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha.$$

4. 在直角三角形ABC中，$\angle C$是直角，证明：

$$BC = AB\sin A,$$
$$AC = AB\cos A,$$
$$BC = AC\,\mathrm{tg} A.$$

5. 证明：

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \mathrm{tg} 45° = 1,$$

$$\sin 30° = \frac{1}{2},\quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \mathrm{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

6. 求60°、120°、135°和150°各角的三角函数。
7. 叙述并证明余弦定理。
8. 叙述并证明正弦定理。
9. 已知三角形哪三个元素，可确定一个三角形？
10. 已知三角形的一边为 $1cm$ 和这个边所对的角为30°，求这三角形外接圆的半径。

§15. 多 边 形

凸多边形 由点A_1，A_2，…，A_n及按顺序连成的线段A_1A_2，A_2A_3，…，A_nA_1构成的图形叫做多边形$A_1A_2\cdots A_n$（如图117）。点A_1，A_2，…，A_n叫做多边形的**顶点**，而线段A_1A_2，A_2A_3，…，A_nA_1叫做多边形的**边**。连结成一条边的两个顶点叫做**相邻的顶点**。每个顶点都有两个相邻的顶点。

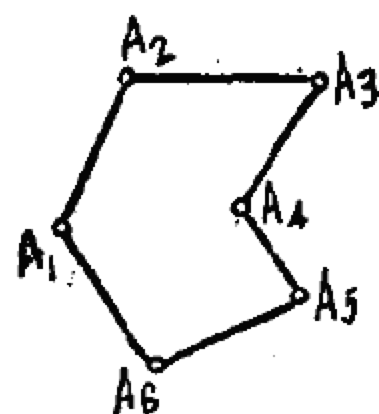


图 117

直线A_1A_2，A_2A_3，…，A_nA_1中的每一条直线都将平面分成两个半平面。如果多边形，对它的每一条这样的直线而言，都在同一半平面内，并且每一条直线A_pA_{p+1}，除线段A_pA_{p+1}外，与多边形不

再有其它公共点，那么这多边形叫**凸多边形**（如图118）。

定理15.1 如果折线$B_1B_2\cdots B_n$的两个端点，对直线b而言，在不同的半平面内，则这条折线必与直线b相交.

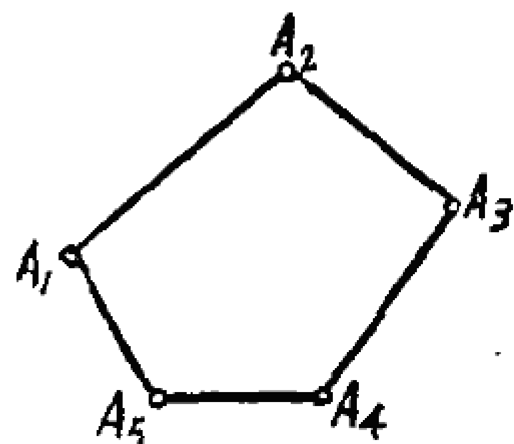


图 118

证明 从折线端点B_1向B_n，沿折线察看，总可发现对直线b而言，在不同半平面内的两个相邻的顶点，连结这两个相邻顶点的线段必与直线b相交，因此折线必与直线b相交。定理得证。

定理15.2 如果一条直线与一凸多边形有三个公共点，那么这条直线必包含这个凸多边形的一条边。

证明 设A、B、C是直线a上的三个点，这三点都在已知的多边形上，为了明确起见，设点B位于点A和点C之间，点B必在多边形一条边上，我们可肯定这条边必在直线a上。事实上，如果与此相反，那么，包含这条边的直线将分隔A点和C点，而这与凸多边形的条件相矛盾。定理得证。

凸多边形内角之和 在凸多边形内，连结不相邻两顶点的线段叫做多边形的**对角线**。在图119中，虚线线段就是多边形的一条对角线。

定理15.3 对角线A_1A_p将凸多边形$A_1A_2\cdots A_n$分成两个凸多边形$A_1A_2\cdots A_p$和$A_pA_{p+1}\cdots A_nA_1$，这两个凸多边形，对直线A_1A_p而言，在不同的半平面内，射线A_1A_p必从射线A_1A_2和A_1A_n之间通过。

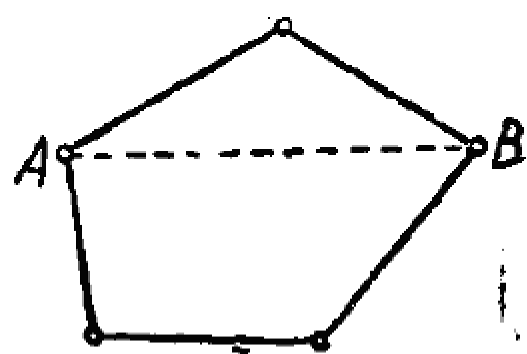


图 119

证明 根据定理15.2，可知直线 A_1A_p 与凸多边形除 A_1 及 A_p 两点外，不再有其它公共点。根据定理15.1，可知折线 $A_1A_2\cdots A_p$ 必位于直线 A_1A_p 的同一侧。由于原凸多边形对 A_1A_2，A_2A_3，… 中每一直线来说都在同一侧，所以多边形 $A_1A_2\cdots A_p$ 也具有这种性质。因此，多边形 $A_1A_2\cdots A_p$ 是一个凸多边形。同理可证，另一个多边形 $A_pA_{p+1}\cdots A_nA_1$ 也是一个凸多边形。

现在证明定理的另一些结论。射线 A_1A_p 对直线 A_1A_n 而言，与 A_1A_2 在同一半平面内，而射线 A_1A_p 对直线 A_1A_2 而言，与 A_1A_n 在同一半平面内。这就是说，射线 A_1A_p 从射线 A_1A_2 和 A_1A_n 之间通过。因此，射线 A_1A_2 和 A_1A_n 被射线 A_1A_p 分隔。

由此可知，点 A_2 和点 A_n，对直线 A_1A_p 而言，位于不同的半平面内。这就是说，多边形 $A_1A_2\cdots A_p$ 和多边形 $A_pA_{p+1}\cdots A_nA_1$ 位于不同的半平面内。定理得证。

设 A 是凸多边形中的一个顶点，B 和 C 是顶点 A 的相邻顶点，以 A 为顶点，射线 AB 和 AC 所夹的角叫做凸多边形的一个**内角**，与内角互补的角叫做凸多边形的**外角**。

定理15.4 凸多边形的内角之和等于(n－2)180°(这里n为多边形的边数或顶点数)。

凸多边形的外角之和与n无关，并等于360°。

证明 三角形也是一个凸多边形，因为(3－2)×180°＝180°，所以这个定理对三角形也成立。现在用数学归纳法证明这个定理。设这个定理对少于 n 边的多边形是成立的，证明这一定理对 n 边多边形也成立。

设 Q 是一个 n 边多边形，连结这个多边形中两个不相邻的顶点 A 和 B 得对角线 AB。根据定理15.3，我们可得到两

个多边形Q_1和Q_2，Q_1的边数为n_1，Q_2的边数为n_2，$n_1<n$，$n_2<n$，$n_1+n_2=n+2$。因为对角线AB从顶点A的两个相邻的边之间通过，所以多边形Q中，以A为顶点的内角等于多边形Q_1和Q_2中以A为顶点的内角之和。同理可证，多边形Q中，以B为顶点的内角等于多边形Q_1和Q_2中以B点为顶点的内角之和。由此可得出多边形各内角之和等于

$$(n_1-2)\times 180°+(n_2-2)\times 180°=(n-2)\times 180°.$$

定理中第一个结论得证。

因为多边形的外角与其相邻的内角互为补角，即同一顶点的外角与内角之和等于180°，所以多边形各外角之和等于$180°\times n-(n-2)\times 180°$，即为360°。定理得证。

多边域　凸折线　设$A_1A_2\cdots A_n$是一个凸多边形，n条直线A_1A_2，A_2A_3，…，A_nA_1中的每条直线都将平面分成两个半平面，在这些半平面中标出哪些包含多边形的半平面，如果点X位于每一个标出的半平面内，但不能在多边形上，那么我们说点X**位于多边形的内部**。

我们说一个多边形，往往不仅指它的边和顶点，而且也指多边形内部的所有点，我们称这种意义的多边形为**多边域**。多边形本身成为多边域的周界，图120带细线的图形就是多边域。

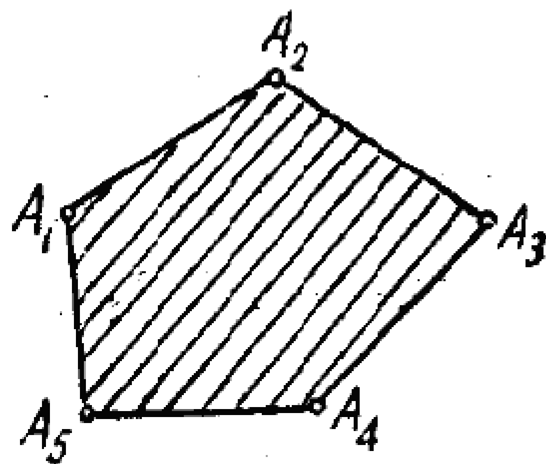


图　120

设P_1和P_2是两个凸多边形，并设P'_1和P'_2是与P_1和P_2相应的多边域，我们说多边形P_1**位于多边形P_2之内**，乃是指多边域P'_1的每一点都属于多边域P'_2。多边形各边长度之和叫做多边形的**周长**。

定理15.5　如果凸多边形P_1位于凸多边形P_2之内，则P_1的周长不大于P_2的周长；如果多边形P_1不与多边形P_2完全重合，且P_1位于P_2之内，则P_1的周长必小于P_2的周长。

证明　作直线a使其包含多边形P_1的某一条边(如图121)，对直线a而言，多边形P_1位于同一侧；多边形P_2对直线a而言，可能在同一侧，也可能P_2中的一些点位于直线a的两侧。在第二种情况下，直线a与多边形P_2交于A、B两点。在实际上，设C和D是多边形P_2上的分别位于直线a两侧的两个点，则点C和点D把多边形P_2分成两条折线，按定理15.1可知，这两条折线都与直线a相交。

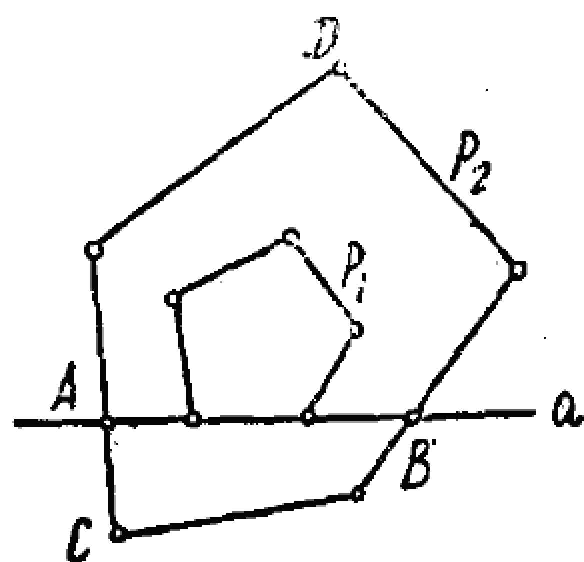


图　121

直线a把多边形P_2分成两个多边形。设Q_2，对直线a而言，是一个与P_1在同一侧的多边形，多边形P_1在多边形Q_2之内，并且Q_2的周长小于多边形P_2的周长。Q_2的周长所以小于P_2的周长，是因为我们把部分折线换成连结两端点的线段AB，从而把多边形P_2变成多边形Q_2。

对多边形P_1的每条边都可进行这种构图，最后我们从多边形P_2得到多边形P_1。因此，如果多边形P_1与P_2不重合，那么P_1的周长必小于P_2的周长。定理得证。

如果多边形P：$A_1A_2\cdots A_n$是一个凸多边形，则折线γ：$A_1A_2\cdots A_n$叫做**凸折线**，如果折线γ'：$A_1A'_2A'_3\cdots A_n$与折线γ，对直线A_1A_n而言，位于同一半平面内，并且折线γ'不包含多边形P的内部的点，那么我们说折线γ'**包围**凸折线γ(如图122)。

定理15.6 γ'是一条包围凸折线γ的折线，γ'的长不小于γ之长，如果两条折线不重合，则γ'有较大的周长。

证明 如图123，作直线a使之包含折线γ的某一节线段。从起点A沿折线γ'察看到终点B，在察看过程中标出折线γ'与直线a的第一个交点C和末一个交点D，如果我们把

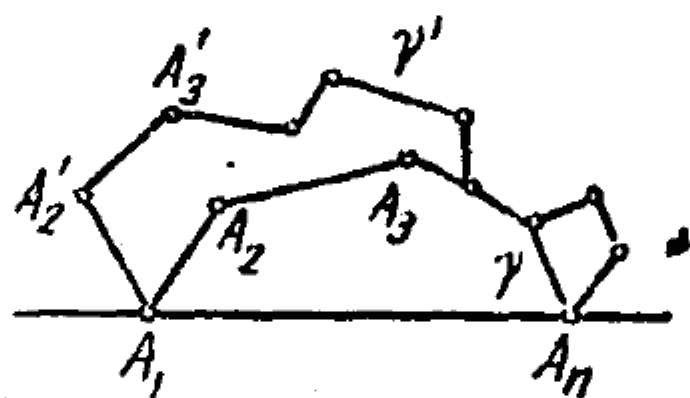


图 122

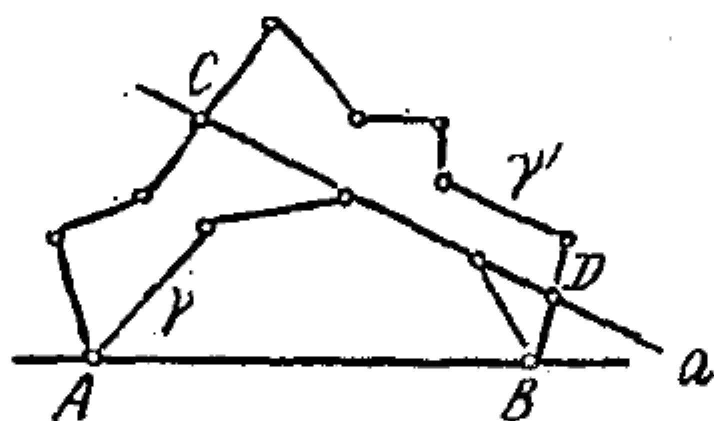


图 123

折线γ'从C点到D点的这一部分折线换为直线段CD，那么，我们所得到的折线仍包围折线γ，并且所得折线的长度不大于折线γ'的长度；并且如果在折线γ'上有点位于直线a两侧的话，那么所得折线之长显然小于折线γ'之长。折线γ有若干节线段，则对其进行若干次和上面相同的作法，终于，我们能把折线γ'换成折线γ。由此可见，折线γ'的周长不小于折线γ的周长。如果γ'不与γ重合，那么γ'的周长必大于γ的周长。定理得证。

正多边形 如果凸多边形的各边相等，各角也相等，则这个凸多边形叫做**正多边形**。因为凸多边形各外角之和等于360°，而它的各内角之和等于$(n-2)\times180°$，所以正n边形的外角等于$\frac{360°}{n}$，而它的内角等于$\frac{(n-2)\times180°}{n}$。

两个正凸n边形，如果边长相等，则这两个正凸n边形

全等，即这两个多边形，经过运动之后，可以完全重合。

设 P_1：$A_1A_2\cdots A_n$ 和 P_2：$B_1B_2\cdots B_n$ 为两个已知的正凸 n 边形。我们可用运动使线段 B_1B_2 与线段 A_1A_2 重合，并使 n 边形 P_2 与 P_1 对直线 A_1A_2 而言，位于同一半平面内。这种运动可用下法得到。

首先，以线段 A_1B_1 的中垂线为对称轴，进行对称变换，使点 B_1 与 A_1 重合，此时，点 B_2 变为某点 B'_2。再以线段 $A_2B'_2$ 的中垂线为对称轴，进行对称变换，使点 B'_2 与点 A_2 重合。如果多边形 P_2 和 P_1，对直线 A_1A_2 而言，位于不同的半平面内，则可以直线 A_1A_2 为对称轴，再进行一次对称变换。

我们可以断言：如此变换后，多边形 P_2 和 P_1 的边 B_1B_2 和 A_1A_2 完全重合，两个多边形必完全吻合。事实上，因 $\angle A_1A_2A_3=\angle B_1B_2B_3$，所以射线 A_2A_3 与射线 B_2B_3 重合，又因线段 A_2A_3 等于线段 B_2B_3，故点 B_3 与点 A_3 重合。两个多边形，对直线 A_2A_3 而言，位于同一半平面内，即位于这两个多边形公共顶点 A_1 所在的半平面内。同法可以得出：顶点 B_4 与 A_4 重合，B_5 与 A_5 重合等等，即多边形 P_2 与 P_1 完全重合。

定理15.7 正多边形各边的中垂线及各内角的平分线都是该正多边形的对称轴（如图124）。

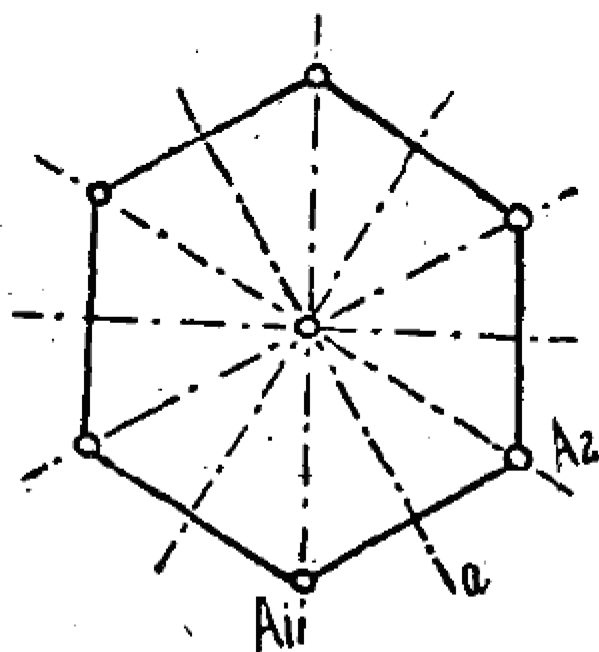


图 124

证明 设 P：$A_1A_2\cdots A_n$ 是一个正多边形，直线 a 是它的 A_1A_2 边的中垂线。关于直线 a 的对称变换把多边形 P 变成多边形 P'：$A_2A_1A'_3A'_4\cdots A'_n$。两个多

边形P和P'，对直线A_1A_2而言，位于同一侧，根据前面的讨论，我们可得出如下结论：点A'_3与点A_3重合，点A'_4与点A_4重合，…，点A'_n与点A_n重合。这就意味着，关于直线a的对称变换把多边形P变成它自身，即直线a为对称轴。同理可证正多边形各内角的平分线也是它的对称轴。定理得证。

圆的内接多边形和外切多边形　**各顶点位于同圆上的多边形叫做圆的内接多形边，各边都与同圆相切的多边形叫做圆的外切多边形。**

定理15.8　正凸多边形是一个圆的内接多边形，同时也是另一个圆的外切多边形。

证明　设$A_1A_2\cdots A_n$是一个已知的正多边形，过三点A_1、A_2、A_3作一圆K（如图125），圆心O位于线段A_2A_3的中垂线a上，直线a是多边形的对称轴，同时也是K圆的对称轴，因此，A_1点关于直线a的对称点A_4必在K圆上。同样取A_2、A_3、A_4三点，可见A_5必位于这三点所决定的圆上，即A_5位于圆K上，依此类推。可见，所有点A_1，A_2，…都位于圆K上，即圆K是多边形的外接圆。

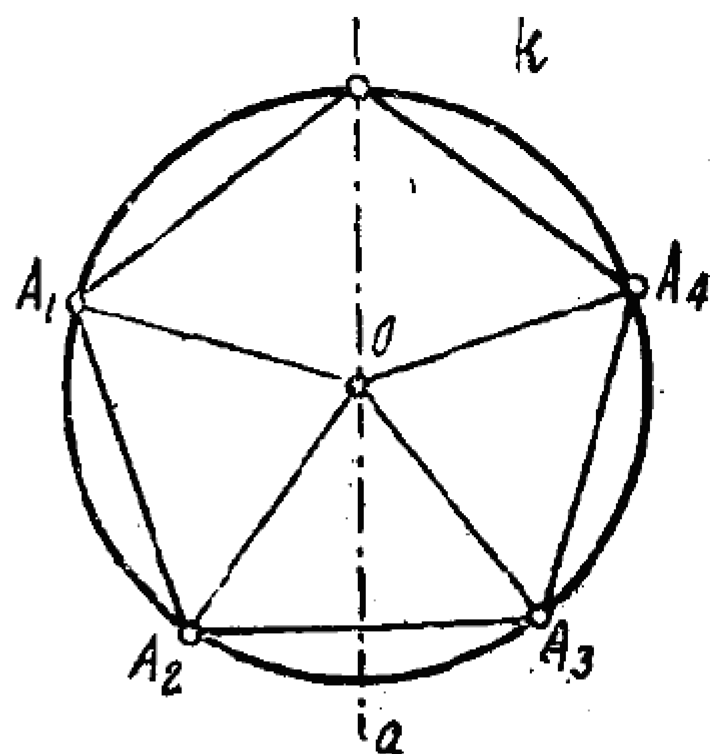


图　125

在等腰三角形A_1OA_2，A_2OA_3，A_3OA_4，…中，已知$A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_nA_1$，并且各等腰三角形的腰是圆的半径，所以这些等腰三角形都全等。由此可得，这些等腰三角形从O点到底边上的高都相等。以O为圆心，以相等的高

为半径可作一圆，此圆必与多边形各边相切，即多边形是圆的外切多边形．定理得证．

相似多边形 按图形相似的一般定义，两多边形相似是指一个多边形可用相似变换变成另一个多边形。

定理15.9 两个边数相同的正凸多边形必相似．

证明 设P：$A_1A_2\cdots A_n$和Q：$B_1B_2\cdots B_n$为已知的两个边数相同的正多边形，用$k=\frac{A_1A_2}{B_1B_2}$来表示两个多边形对应边的比．我们用如下的一个位似变换来变多边形Q：这位似变换以Q的外接圆圆心为相似中心，并以k为相似系数。经过位似变换后，多边形Q变成多边形Q'，其边长为$k\cdot B_1B_2=A_1A_2$，故多边形Q'全等于多边形P。再经过必要的运动，Q'可重合于P，但位似及运动接连运用的结果为相似变换，故多边形Q可用相似变换变成多边形P，即多边形P相似于多边形Q。定理得证．

我们根据外接圆半径R来求正多边形的边长。先求正六边形（如图126），正六边形的内角等于120°，因此，$\triangle A_1OA_2$是一个正三角形，其内角等于60°。由此可得，**正六边形的边长等于它的外接圆的半径R。**

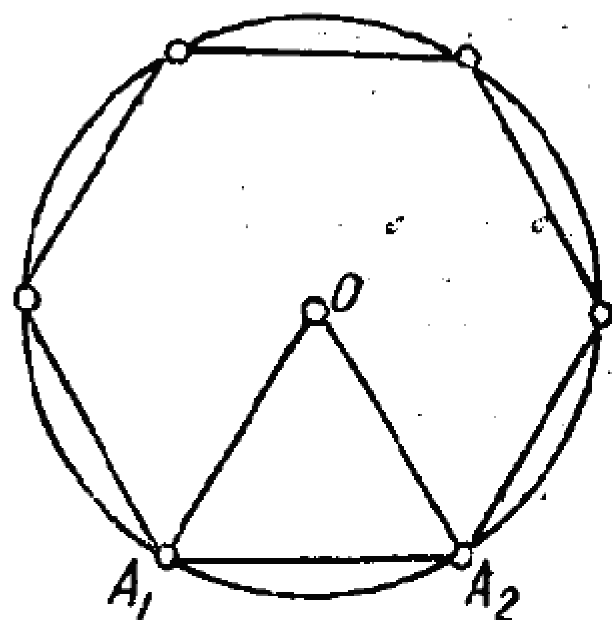


图 126

正四边形的内角等于90°，即正四边形是一个正方形（如图127）。在$\triangle A_1OA_2$中，$\angle A_1=\angle A_2=45°$，而$\angle A_1OA_2=90°$，因此，可以得出：

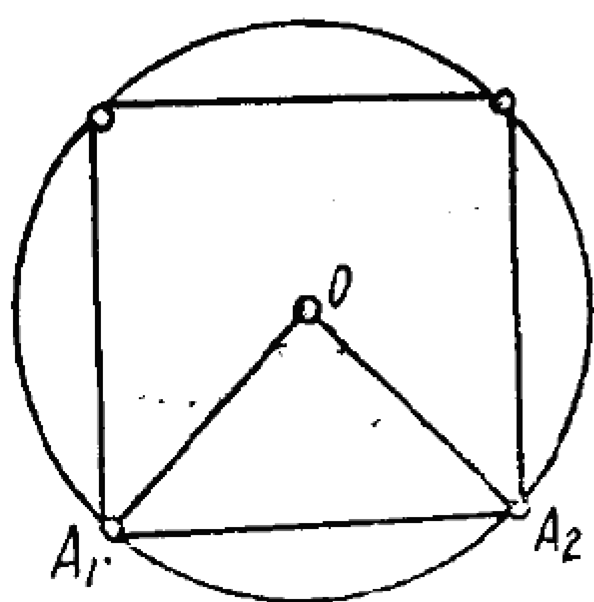


图 127

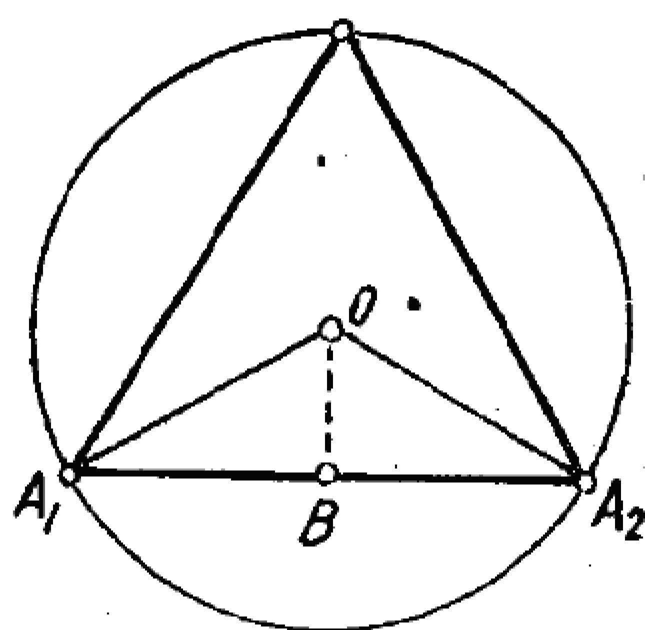


图 128

$$A_1A_2=\frac{OA_1}{\cos 45^\circ}=R\sqrt{2}.$$

正三角形的内角等于60°，在$\triangle A_1OA_2$中，$\angle OA_1A_2=\angle OA_2A_1=30^\circ$（如图128），从外接圆心$O$向$A_1A_2$作一条垂线$OB$，则可得：

$$A_1A_2=2A_1B=2\cdot OA_1\cos 30^\circ=R\sqrt{3}.$$

复习题及练习题

1. 什么样的图形叫做多边形？什么样的多边形叫做凸多边形？
2. 证明：如果折线$B_1B_2\cdots B_n$的两端点B_1及B_n，对直线b而言，位于不同的半平面内，则这条折线必与直线b相交。
3. 证明：如果一条直线与凸多边形有三个公共点，则这直线必包含凸多边形的一条边。
4. 证明：凸多边形的任意一条对角线，把这个凸多边形分成两个凸多边形，这两个凸多边形，对这条对角线而言，位于不同的半平面内。
5. 证明：凸多边形的内角之和等于$(n-2)\times 180^\circ$，它的外

角之和等于360°。

6．什么样的图形叫做多边域？

7．叙述并证明：有关两个凸多边形周长关系的定理（假定一个凸多边形位于另一个凸多边形之内）。

8．是否可以在边长为 $3cm$ 的正方形内作一个边长为 $4cm$ 的正三角形？

9．叙述并证明：有关一条凸折线和包围它的凸折线的长度关系的定理。

10．证明：两个等边的正凸 n 边形是全等的正凸 n 边形。

11．什么样的直线是正凸多边形的对称轴？叙述并证明有关这方面的定理。

12．证明：每个正多边形都可以作一个外接圆和一个内切圆。

13．证明两个边数相同的正凸多边形是相似的多边形。

14．证明：边数相同的正多边形的周长比，等于它们外接圆的半径比，也等于内切圆的半径比。

15．如果多边形的外接圆半径为 R，试求正六边形、正四边形（即正方形）和正三角形的边长。

16．试求圆的半径与边数相同的内接正多边形、外切正多边形的边长之间的关系。

17．已知正八边形的外接圆半径，求正八边形的边长。

18．已知正十边形的外接圆半径，求正十边形的边长。（提示：请参照§13中第17题。）

19．已知正五边形的外接圆半径，求正五边形的边长。

§16．图形的面积

面积的概念　求图形面积问题可追溯到远古时期，人类在生活实践中经常遇到这方面的问题。

现在看图129中的两地块：一块是正方形，而另一块是任意图形，现在假设，在这两块地上播种小麦，播种后计算出用种籽量。设在第一块地播 m 公斤种籽，在第二块地播 n 公斤种籽，很自然我们可以认为：第二块地是第一块地的 $\frac{n}{m}$ 倍。如果我们以第一块地作度量的单位，那么上面所指出的倍数 $\frac{n}{m}$，我们将称之为第二块地的面积。用这种方法确定的面积概念具有如下三条性质：

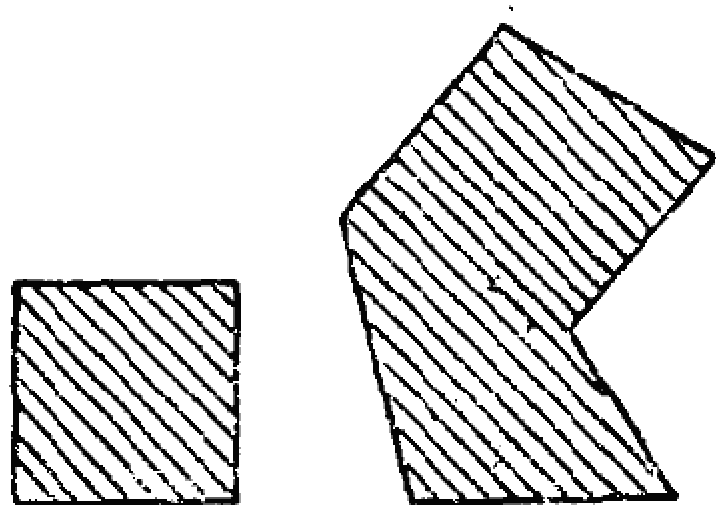


图 129

第一，因为播种时每块地都需要一定数量的种籽，所以每块地都具有确定的面积。

第二，对全等的地块，播种时需用同量的种籽，所以全等的地块具有相同的面积。

第三，如果把已知的地块分成两部分，则已知地块的播种量等于所分两部分地块的播种量之和。因此，**整个地块的面积等于它的各个部分地块的面积之和。**

按照上面所给的定义，为了知道地块的面积，我们必须在地块上进行播种。然而，在日常生活中，往往需要解决的问题恰好与此相反，即播种时要求计算不同大小地块所需要的种籽量。假如我们知道地块的面积，则将地块面积乘以单位面积上所播种籽量，即可得出这地块上所需播的种籽量。可是，如何才能计算出地块的面积呢？

现在我们证明，**上面指出的面积三条性质可确定面积，**

并求出计算简单图形面积的公式。

可分成若干个三角形的图形叫做简单图形，其中，象平行四边形、梯形、凸多边形都是简单图形。

矩形的面积　首先求矩形的面积。在图130中，所绘正方形是度量面积的单位，而所绘矩形是一个需要度量面积的图形。

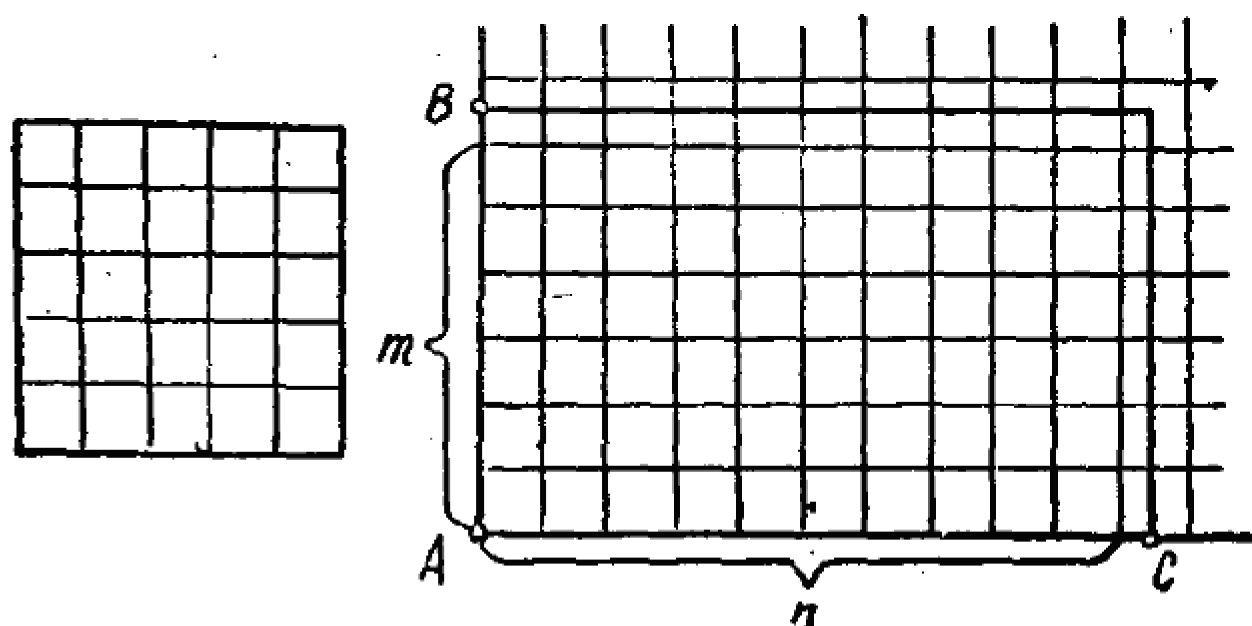


图　130

将正方形的两边各分成N等分，然后过各分点作平行于正方形各边的平行线，如此可将正方形分成N^2个小的正方形，图中给出的正方形每边分成五等分，这个正方形共有$5\times5=25$个小的正方形。

现在求小正方形的面积。根据面积的性质，可知大正方形的面积等于诸小正方形面积之和。因为大正方形的面积等于1，而小正方形共有N^2个，所以小正方形的面积等于$\frac{1}{N^2}$。如果以q来表示小正方形的边长，则$q=\frac{1}{N}$，因而，小正方形的面积可表示为：$\frac{1}{N^2}=q^2$。

现在在射线AB和AC上，截取q，$2q$，$3q$，…等线段，且过等分点作平行于矩形两边的平行线，如此，便可把

矩形分成边长为 q 的小正方形网，求出在矩形内有多少个小正方形，即可求出矩形的面积。

设 矩形的边长为 a 和 b，用整数 m 表示 a 除以 q 的商，用整数 n 表示 b 除以 q 的商。由此可得知在矩形内共有小正方形 mn 个，而且在矩形内不可能有大于 $(m+1)(n+1)$ 个小正方形。因此，矩形的面积必介于 mnq^2 及 $(m+1)(n+1)q^2$ 之间，即

$$mnq^2 \leqslant S < (m+1)(n+1)q^2.$$

现在证明乘积 ab 也介于这两数之间。事实上，$mq \leqslant a < (m+1)q$，$nq \leqslant b < (n+1)q$。因此得出：

$$mnq^2 \leqslant ab < (m+1)(n+1)q^2.$$

既然两数 S 及 ab 都介于两数 mnq^2 及 $(m+1)(n+1)q^2$ 之间，故 S 及 ab 之差不可能大于 $(m+1)(n+1)q^2 - mnq^2$，即不可能大于 $mq^2+nq^2+q^2$。但因 $mq \leqslant a$，$nq \leqslant b$，所以，S 及 ab 之差不可能大于 $aq+bq+q^2$。假如 N 取值充分大，则 $aq+bq+q^2 = \frac{a}{N} + \frac{b}{N} + \frac{1}{N^2}$ 将是一个相当小的数。因此，S 及 ab 之差将是一个相当小的数，而这只当 S 及 ab 相等时才有可能。

所以，**边长为 a 和 b 的矩形面积**

$$\mathbf{S = ab.}$$

这里 a 及 b 是矩形的边长，是以小正方形的边长为长度单位量的（这小正方形是度量面积的单位）。

简单图形的面积

求平行四边形的面积．设 $ABCD$ 是一个已知的平行边形（如图131），如果这个平行四边形不是一个矩形，则 $\angle A$ 和 $\angle B$ 中必有一个是锐角．为了明确起见，设 $\angle A$ 是一个锐角

（如图所示），过A点向直线CD引垂线AE，梯形$ABCE$的面积等于平行四边形$ABCD$的面积与三角形ADE的面积之和。

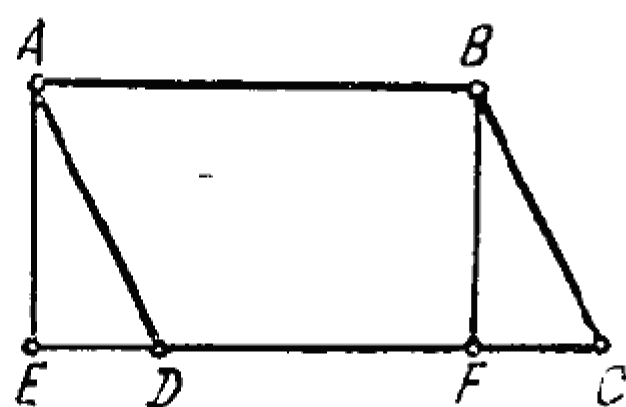


图 131

过B点向直线CD引垂线BF，梯形$ABCE$的面积又等于矩形$ABFE$的面积与三角形BCF的面积之和。直角三角形ADE与直角三角形BCF全等，这就是说，两个三角形的面积也相等。由此可得出：平行四边形$ABCD$的面积等于矩形$ABFE$的面积，即等于$AB \cdot BF$。

线段BF是平行四边形中相应于AB及CD两边之高，即平行四边形中AB和CD两平行对边间的距离。

因此，**平行四边形的面积等于它的一条边与其相应高的乘积.**

求三角形的面积。设ABC是一个已知的三角形（如图132），过三角形顶点C作一条底边AB的平行线，过顶点A作一条BC边的平行线，其交点为D，由此可得到平行四边形$ABCD$（如图所示）。平行四边形$ABCD$的面积等于三角形ABC的面积与三角形CDA的面积之和。因为这两个三角形全等，所以平行四边形的面积等于三角形ABC面积的二倍。平行四边形中相应于AB边的高等于三角形ABC中AB边上的高。

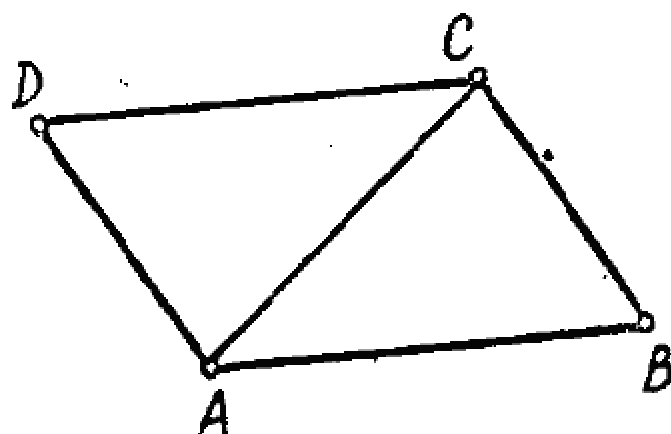


图 132

由此可得出，**三角形的面积等于它的一条边和这条边上高的乘积的一半。**

求梯形的面积．设 $ABCD$ 是一个已知的梯形（如图133），梯形的对角线 AC 把梯形分成两个三角形：$\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$，因此，梯形 $ABCD$ 的面积等于这两个三角形面积之和。三角形 ABC 的面积等于 $\frac{1}{2}AB \cdot CE$，而三角形 ACD 的面积等于 $\frac{1}{2}DC \cdot AF$。这两个三角形的高 CE 和 AF 是平行线 AB 和 CD 之间的距离，这个距离叫做梯形 $ABCD$ 的**高**。

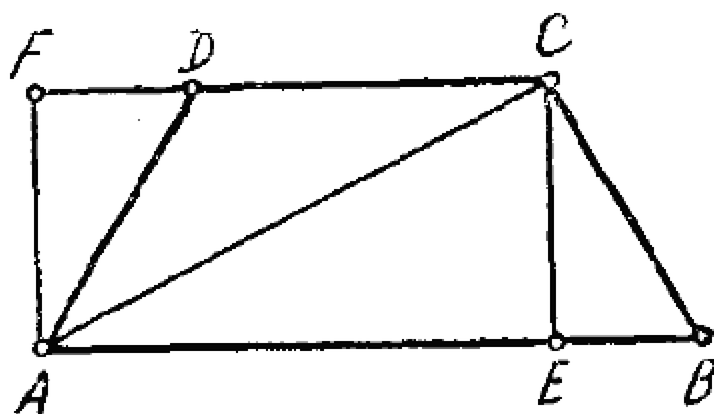


图 133

由此可得，**梯形的面积等于它的两底之和的一半与高的乘积**。

简单图形的面积与它分割成三角形的方法无关。简单图形的面积等于组成这图形的各三角形面积的和。然而，一个简单图形可用不同的方法分割成数个三角形，因此便出现一个问题，即简单图形的面积与它分割成三角形的方法是否有关系。我们说，**简单图形的面积与它分割成三角形的方法是无关的**。

首先证明：计算三角形面积时，不管取哪一条边与相应的高，所求得的三角形的面积都是相等的。设 ABC 是一个已知的三角形（如图134），作这三角形的高 CC_1 及 BB_1。直角三角形

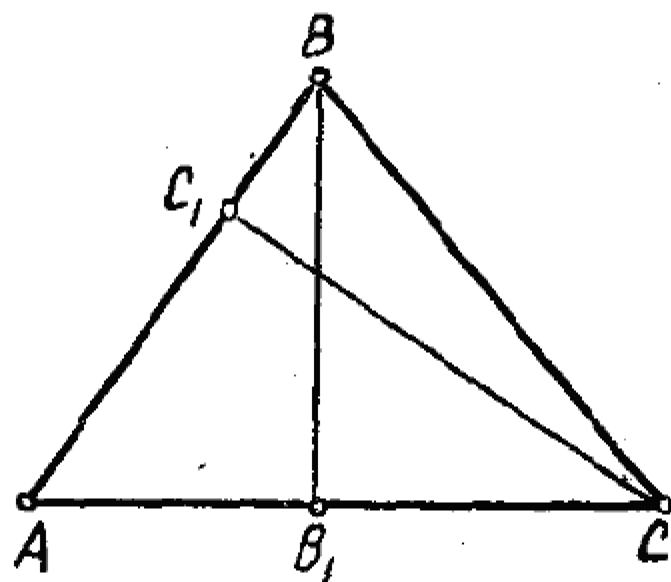


图 134

AC_1C与直角三角形AB_1B相似（因为$\angle A$是公共角）。因此可得到：

$$\frac{AC}{AB}=\frac{CC_1}{BB_1},$$

$$AC\cdot BB_1=AB\cdot CC_1.$$

由此可知，在我们计算三角形ABC的面积时，无论取AC边与其高BB_1，或取AB边与其高CC_1，所求得的结果是相同的。

现在证明：无论怎样分割三角形，三角形的面积都等于分割后的小三角形面积的总和，但面积的值与分割方法无关。首先分析图135中所示出的分割方法，在这里，三角形ABC分割成三角形CAD_1，CD_1D_2，CD_2D_3，…等等。所有这些三角形从公共顶点C到底边上的高都等于h，这个高也是三角形ABC的高。

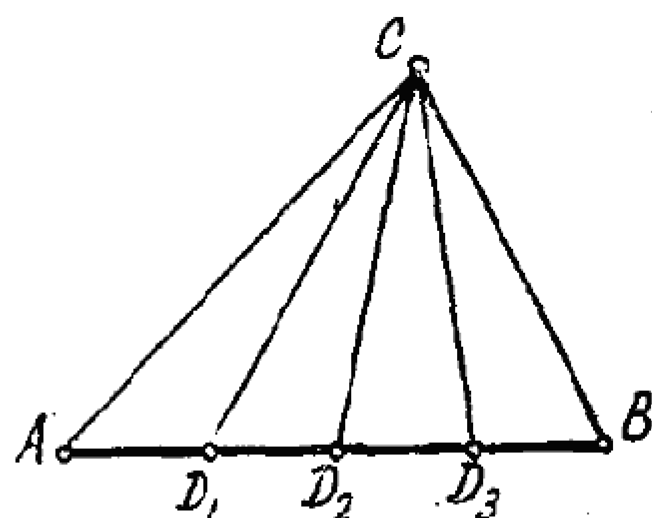


图 135

分割所得小三角形面积之和等于

$$\frac{AD_1\cdot h}{2}+\frac{D_1D_2\cdot h}{2}+\frac{D_2D_3\cdot h}{2}+\cdots$$

$$=\frac{(AD_1+D_1D_2+D_2D_3+\cdots)\cdot h}{2}.$$

因为 $AD_1+D_1D_2+D_2D_3+\cdots=AB$，

所以分割所得小三角形面积之和等于$\frac{AB\cdot h}{2}$，即等于三角形ABC的面积。

现在我们把三角形ABC任意地分割成一些小三角形，

其中任意两个小三角形的相关位置不外乎三种情况：或者没有公共点，或者有一个公共顶点，或者有一条公共边。这种分割法如图136所示。

图137示出一个分割后的三角形PQR。三角形PQR的面积可用三个三角形APQ，AQR，ARP 面积的代数和表示。

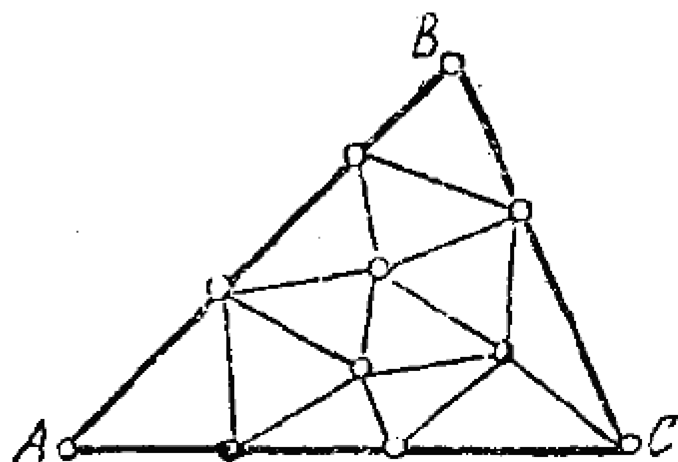


图 136

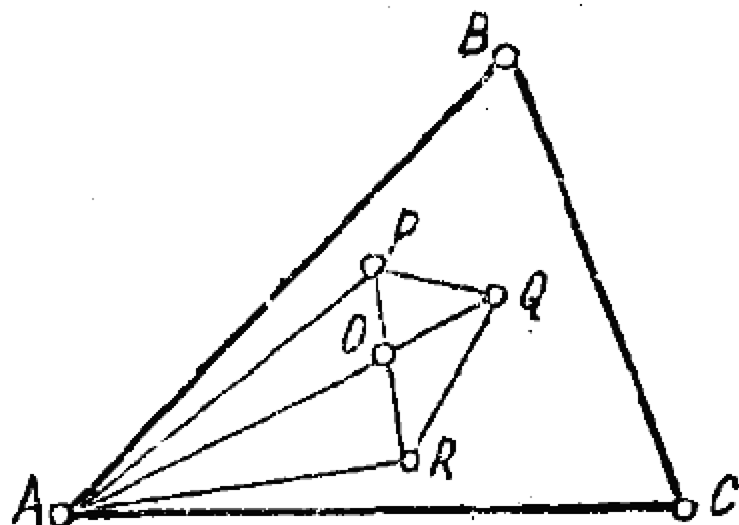


图 137

如果三角形 PQR 中每个顶点分别用顶点A来代替，则可得出三个三角形 APQ，AQR，ARP，这三个三角形的面积分正负，我们按下列规则取符号：如果被顶点A所代替的顶点，对另外两顶点的连线而言，与顶点A位于同一侧时，则三角形面积取“＋”号；如果被顶点A所代替的顶点，对另外两顶点的连线而言，与顶点A位于不同的两侧时，则取“－”号；如果三个顶点P，Q，R在一条直线上时，则不必考虑计算面积的代数和，因为这时三角形PQR成直线，其面积等于零。

我们就图137示出的三角形PQR的位置来验证上面的断言。按上面刚证明过的结果可有：

$S(PQR)=S(PQO)+S(QRO)$，（S表面积）

$S(APQ)=S(APO)+S(PQO)$，

$S(ARQ)=S(ARO)+S(QRO)$，

$$S(APR)=S(APO)+S(ARO).$$

由此得出：

$$S(PQR)=S(APQ)+S(ARQ)-S(APR).$$

关于三角形 PQR 的面积是三个三角形 APQ、AQR 和 ARP 面积之代数和的概念，经过上述三角形 PQR 位置的实际范例的验证之后，得出我们的结论是正确的。当 $\triangle PQR$ 在其它位置时，我们相信这个结论也是正确的。

当每个分割所得的小三角形面积用以顶点为 A 的一些分割后的三角形面积之代数和表示时，我们把被分割的所有三角形面积加起来，将得到诸 $\triangle AXY$ 面积之和，其 XY 是分割三角形的边. 假如线段 XY 在三角形 ABC 的内部，则 $\triangle AXY$ 的面积在这个代数和中会出现两次，因为 XY 是两个分割后的三角形公共边。又因为以 XY 为公共边的两个小三角形位于直线 XY 的两侧，所以三角形 AXY 的面积会出现一次为"+"号，一次为"-"号，因此，这两项相互抵消。

如果线段 XY 在三角形 ABC 的 BC 边上，则三角形 AXY 的面积在代数和中仅出现一次，并且带"+"号；如果线段 XY 在 AB 或 AC 边上，则三角形 AXY 的面积等于零。总而言之，分割所得的三角形面积之和等于 XY 边位于 BC 边上的那些三角形 AXY 的面积之和，而上面证过，这面积之和等于三角形 ABC 的面积。因此，三角形 ABC 的面积等于任意分割成的三角形面积之和。

现在假设 F 是一个已知的简单图形，第一分割方法把 F 分成诸三角形 Δ'_1，Δ'_2，Δ'_3，…；第二种分割方法把 F 分成诸三角形 Δ''_1，Δ''_2，Δ''_3，…. 我们证明这两种方法分成的各三角形面积之和必相等.

如果把这两种分割方法所分得的三角形拿到一起，那么

就使图形 F 分成许多凸多边形：三角形、四边形、五边形和六边形。每一个这种多边形是第一种分割法的一个三角形和第二种分割法的一个三角形的公共部分，图 138 示出这样一个五边形。我们把这些多边形再分成为三角形：Δ_1'''，Δ_2'''，Δ_3'''，……，使其中任两三角形或者没有公共点；或者有一个公共顶点；或者有一条公共边。

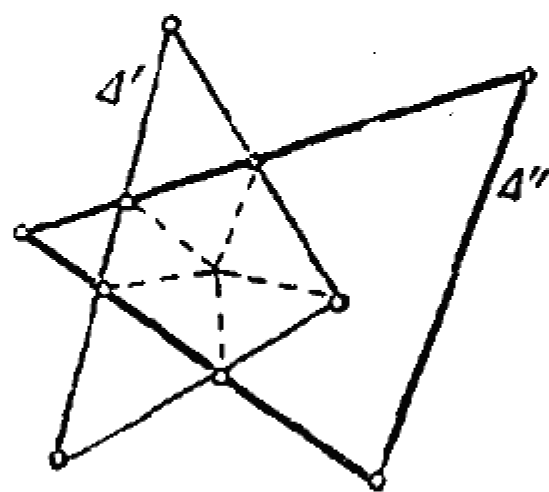


图 138

根据已证明的部分，可知：图形 F 的第一种分割方法的每个三角形 Δ_K' 的面积等于 Δ_K' 所包含的那些三角形 Δ_K''' 的面积之和。同样图形 F 第二种分割方法的每个三角形 Δ_K'' 的面积等于 Δ_K'' 所包含的那些三角形 Δ_K''' 的面积之和。因此，图形 F 第一、第二种分割方法的各个三角形面积的和均等于所有三角形 Δ_K''' 面积之和。所以第一分割法的各个三角形面积之和等于第二种分割法的各个三角形面积之和。这就是说，图形 F 的面积与它分割三角形的方法无关。

相似图形的面积　设 F_1 和 F_2 是两个相似的简单图形，现在我们来阐明这两图形的面积之间的关系。因为两个图形相似，所以存在相似变换，把图形 F_1 变成图形 F_2。

现在把图形 F_1 分割成三角形 Δ_1'，Δ_2'，Δ_3'，…。图形 F_1 变成 F_2 的相似变换使三角形 Δ_1'，Δ_2'，Δ_3'，…变成三角形 Δ_1''，Δ_2''，Δ_3''，…。图形 F_1 的面积等于诸三形 Δ_1'，Δ_2'，Δ_3'，…的面积之和，而图形 F_2 的面积等于诸三角形 Δ_1''，Δ_2''，Δ_3''，…的面积之和。

如果相似系数等于 k，则三角形 Δ_n'' 的尺寸是相应三角形 Δ_n' 的尺寸的 k 倍。其中，三角形 Δ_n'' 的边和高是三角形 Δ_n' 的

相应边和高的k倍。由此可得：$S(\Delta_n)=k^2S(\Delta'_n)$，把这些等式加起来，则得

$$S(F_2)=k^2S(F_1).$$

相似系数k是图形F_2和F_1的对应线性尺寸的比值，即$k=\frac{l_2}{l_1}$。因此

$$S(F_2)=\frac{l_2^2}{l_1^2}S(F_1),$$

或

$$\frac{S(F_2)}{S(F_1)}=\frac{l_2^2}{l_1^2}.$$

即 **相似图形面积的比，等于其对应线性尺寸的平方之比。**

复习题及练习题

1. 叙述面积的性质。
2. 试证明：矩形的面积等于ab，其中a和b是矩形的边长。
3. 证明：平行四边形的面积等于一条边与该边相应的高的乘积。
4. 证明：三角形的面积等于它的一条边和这条边上高的乘积的一半。
5. 证明：三角形ABC的面积等于

$$\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A.$$

6. 证明：梯形的面积等于它的两底之和的一半与高的乘

积。

7. 证明圆的外切凸多边形的面积等于多边形的半周长与它的内切圆半径的乘积。

8. 把已知三角形分成任意个小三角形，试证明各个小三角形面积的和等于已知三角形的面积。

9. 试证明：简单图形的面积与它分割三角形方法无关。

10. 相似图形面积的比值等于什么？

§17. 圆的周长和圆域的面积

圆的周长 设P为一个圆的内接凸多边形，A和B是它的相邻的两个顶点(如图139)，在圆的$\overset{\frown}{AB}$弧上取一点C，并用P_1表示以多边形P中各顶点及点C为顶点的另一多边形。由上可知：$AB<AC+CB$，所以多边形P_1的周长大于多边形P的周长。

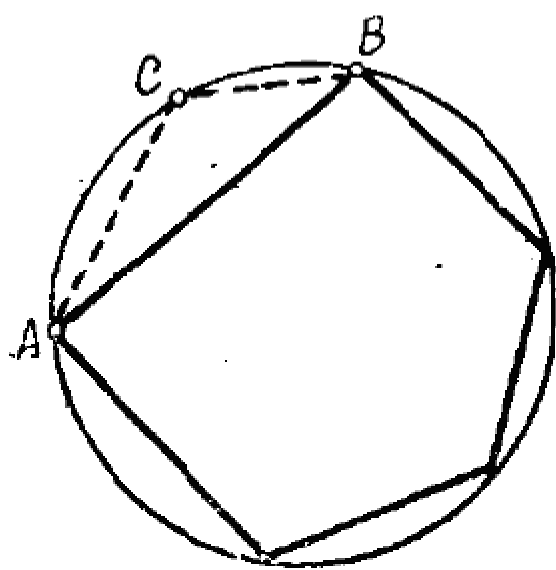


图 139

如果不断地增加圆内接多边形新的顶点，那么圆内接多边形的周长也随之增大，但是，圆内接多边形的周长不可能无限地增大。如果在该圆外作某一个外切多边形，则圆内接多边形的周长必小于圆外切多边形的周长。例如，圆外切正方形的周长为$8R$，圆的任意内接多边形的周长必小于$8R$。

我们把大于圆的任何内接多边形周长的诸数中之最小值叫做**圆的周长**。

不管a为一个什么样的正数，我们总可以在一个已知圆内作一个内接多边形，使圆的周长l与内接多边形周长之差

小于 a。假如我们认为这个结论是不正确的，那么圆的任意内接多边形的周长将小于 $l-a$，从而圆的任意内接多边形的周长必小于 $l-\frac{a}{2}$。但 $l-\frac{a}{2}$ 小于 l，$l-\frac{a}{2}$ 又大于圆的任意内接多边形的周长，因此 l 不是比圆内任何内接多边形周长长的诸数中之最小值，这和 l 为圆周长矛盾。上述结论得证。

定理17.1　两个圆的周长之比等于半径之比，同时也等于直径之比。

证明　设 R_1 和 R_2 是已知两个圆的半径，l_1 和 l_2 是两圆的周长，按定理的结论，有 $\frac{R_1}{R_2}=\frac{l_1}{l_2}$。现在假设这个结论是不正确的，那么必有 $\frac{R_1}{R_2}<\frac{l_1}{l_2}$，或 $\frac{R_2}{R_1}<\frac{l_2}{l_1}$。为了明确起见，设 $\frac{R_1}{R_2}<\frac{l_1}{l_2}$，用 k 表示 $\frac{R_1}{R_2}$ 的比值，则 $\frac{l_1}{l_2}>k$，即 $l_1>k\cdot l_2$。

在第一个圆内作一个内接多边形 Q_1，使多边形的周长 p_1 与该圆的周长之差小于 $l_1-l_2\cdot k$，即 $l_1-p_1<l_1-l_2\cdot k$，那么 $p_1>l_2\cdot k$。

再在第二个圆内作一个内接多边形 Q_2，使 Q_2 与 Q_1 相似。

设 p_2 为 Q_2 的周长，多边形 Q_1 的周长与多边形 Q_2 的周长之比等于两圆半径之比，即 $p_1=k\cdot p_2$。因为 $p_1>k\cdot l_2$，而 $p_1=k\cdot p_2$，所以 $p_2>l_2$。然而，这与圆的周长定义相矛盾，按圆的周长定义，l_2 必大于它的任意内接多边形的周长 p_2。因此，两个圆的周长之比等于两圆半径之比，同时也等于两圆

直径之比：

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{d_1}{d_2},$$

式中：d_1、d_2为两已知圆的直径。
定理得证。

由定理17.1可得出：

$$\frac{l_1}{d_1}=\frac{l_2}{d_2},$$

即 **圆的周长和直径的比是一个常数。**

圆的周长和直径的比叫做**圆周率**，这个常数用希腊字母π表示，π是一个无理数。它的近似值是：

$$\pi=3.1416.$$

由此得出，**计算圆周长的公式**

$$l=2\pi R.$$

圆弧长　弧度制　圆弧长指的是大于圆弧内接任何凸折线长的诸数中的最小值。在图140中，我们看到圆弧$\overset{\frown}{AB}$和

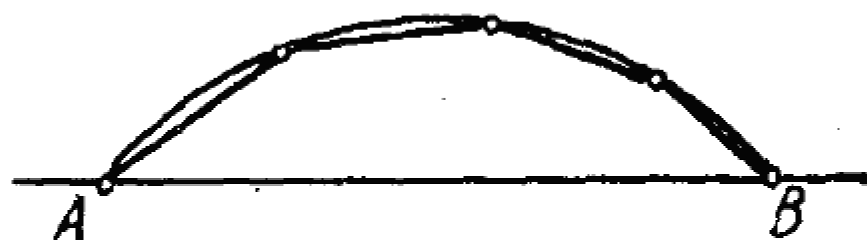


图　140

内接于$\overset{\frown}{AB}$的一条凸折线，我们常把圆的弧长简称为**弧**。

不管a是一个什么样的正数，在一个已知的圆弧中，我们总可作一条内接凸折线使其长与弧长之差小于a。这个定义可用证明圆周长定义的方法来证明。

定理17.2　圆弧长l可按下列公式计算：

$$l=\frac{\pi R}{180}\alpha,$$

式中 α 是弧所对的圆心角的度数。

证明 在已知弧$\overset{\frown}{AB}$上取一点C，C点把$\overset{\frown}{AB}$分成两个圆弧：$\overset{\frown}{AC}$和$\overset{\frown}{CB}$，首先证明，$\overset{\frown}{AB}$长等于$\overset{\frown}{AC}$长与$\overset{\frown}{CB}$长之和。

设a为一个任意小的正数，在$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$和$\overset{\frown}{CB}$内分别作内接折线γ、γ_1和γ_2，使各折线的周长与相应弧长之差小于a.把折线γ_1及折线γ_2的顶点增添到折线γ的顶点中，并把折线γ的顶点增添到折线γ_1及γ_2的顶点中，我们分别得到内接于弧$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$及$\overset{\frown}{CB}$的折线γ'、γ'_1及γ'_2。随着内接凸折线的折点不断增多，内接凸折线的长也随之增加，则折线γ'、γ'_1和γ'_2之长与其相应的弧长之差也总会小于a。

用l、l_1与l_2分别表$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$及$\overset{\frown}{CB}$之长，而用s、s_1和s_2分别表折线γ'、γ'_1及γ'_2之长。折线γ'_1及γ'_2是折线γ'被C点所分成的两个部分.因此，折线γ'_1之长等于折线γ'_1及γ'_2的长度之和，即$s=s_1+s_2$。因$l-s<a$，$l_1-s_1<a$，$l_2-s_2<a$，而$s=s_1+s_2$，故l与l_1+l_2之差小于a。又因为l和l_1+l_2都是定值，而a值可取任意小，所以只有$l=l_1+l_2$时，l与l_1+l_2之差才有可能小于a。结论得证。

现在我们证明，弧$\overset{\frown}{AB}$之长由下列公式给出

$$l=\frac{\pi R}{180}\alpha.$$

设 N是一个较大的正整数，我们用θ表示角$\frac{180}{N}$，以射线OA为一边，以O为顶

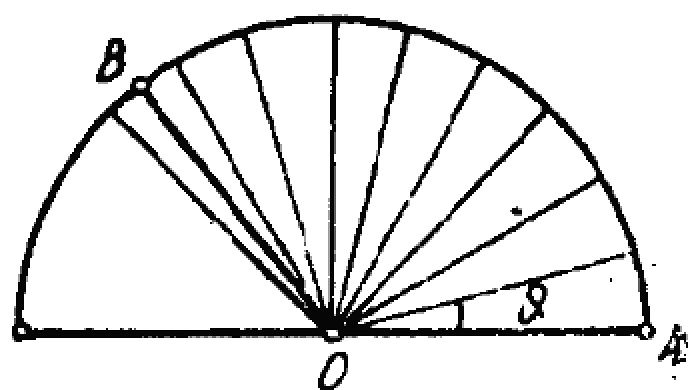


图 141

点作出等于θ，2θ，3θ，……的角。设n是α除以θ的整数商，则

$$n\theta\leqslant\alpha<(n+1)\theta$$

或
$$\frac{n\cdot 180}{N}\leqslant\alpha<\frac{(n+1)180}{N}.$$

由此可得：

$$\frac{n}{N}\pi R\leqslant\frac{\pi R}{180}\alpha<\frac{n+1}{N}\pi R.$$

因为圆的弧长等于它的各个部分的和，所以θ角所对的弧之长等于$\frac{\pi R}{N}$。$\overset{\frown}{AB}$不小于n个等于$\frac{\pi R}{N}$弧的和，但小于$n+1$个等于$\frac{\pi R}{N}$弧的和，即

$$\frac{n}{N}\pi R\leqslant\overset{\frown}{AB}<\frac{n+1}{N}\pi R.$$

从上面两个不等式，我们看到弧$\overset{\frown}{AB}$之长和数$\frac{\pi R\alpha}{180}$都介于两数$\frac{\pi Rn}{N}$及$\frac{\pi R(n+1)}{N}$之间。由此可得出，弧$\overset{\frown}{AB}$之长与数$\frac{\pi R\alpha}{180}$之差不大于

$$\frac{\pi R}{N}(n+1)-\frac{\pi R}{N}n.$$

即　不大于$\frac{\pi R}{N}$，因为N可以取任意大的值，所以弧$\overset{\frown}{AB}$之长必与数$\frac{\pi R\alpha}{180}$相等。定理得证。

弧长与圆的半径的比叫做**角的弧度**。由弧长的计算公式可得：

$$\frac{l}{R}=\frac{\pi}{180}a.$$

即 **角的弧度可由角的度数乘以$\frac{\pi}{180}$得到**。特别是180°角的弧度等于π，而直角的弧度等于$\frac{\pi}{2}$。

弧度是角的弧度单位。当弧长等于半径时，圆心角为1弧度，1弧度等于$\frac{180°}{\pi}\approx 57.3°$。

圆域的面积　扇形的面积　弓形的面积

距定点O不大于R的所有点所构成的图形叫做以点O为圆心、以R为半径的**圆域**（如图142）。以点O为圆心、以R为半径的圆是圆域的边界，通常叫做**圆周**。

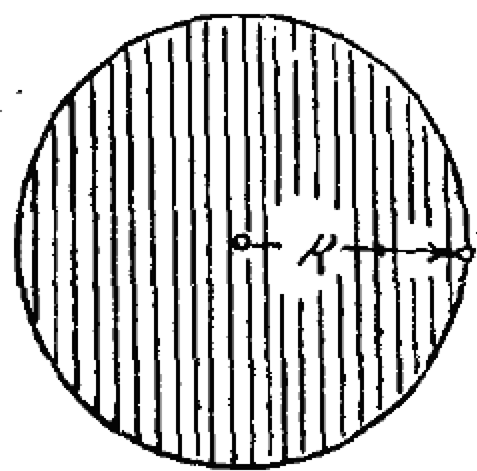


图　142

圆域的面积指的是比圆的任何内接凸多边域面积大的诸数中最小值。

定理17.3　圆域的面积等于它的半径与它的圆周长的乘积的一半，

即 $$S=\frac{lR}{2}=\pi R^2.$$

证明　取a为一个任意小的正数，在圆内作一个内接凸多边形，使圆内接多边形的边长小于$a(cm)$，并使圆内接多边形的边长与圆的周长之差小于$a(cm)$，而圆的面积与该多边形面积之差小于$aR(cm^2)$。为此，我们首先作三个多边形P_1、P_2和P_3，使第一个多边形满足第一个条件，第二个多

边形满足第二个条件，而第三个多边形满足第三个条件。现在以多边形 P_2 和 P_3 的顶点增添于多边形 P_1 的顶点，我们便得到一个满足上述三个条件的多边形 P。

圆内接多边形 P 的面积等于以圆心为公共顶点，圆内接多边形 P 的边为底边的诸三角形面积之和（如图143）。现在我们研究三角形 OAB 的面积（$\triangle OAB$ 是这类三角形中的一个），有

$$S(OAB)=\frac{1}{2}AB\cdot OC.$$

因为 $OA>OC>OA-AC$，

所以

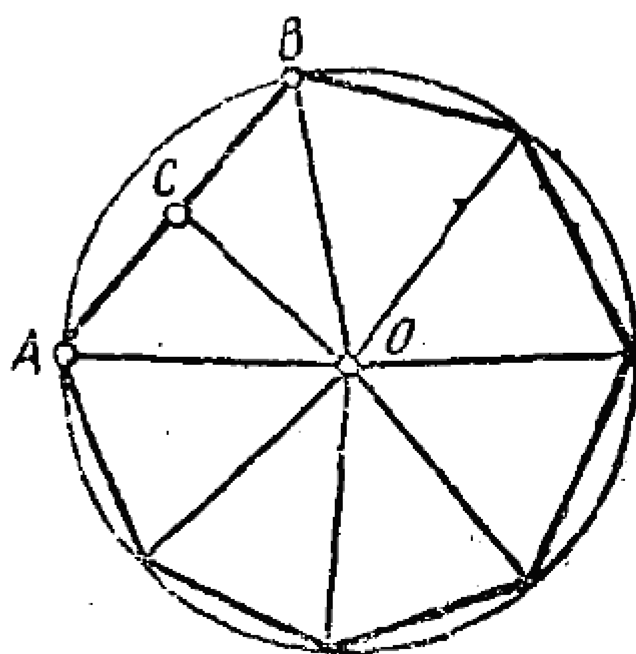


图 143

$$\frac{1}{2}AB(R-a)<S(OAB)<\frac{1}{2}AB\cdot R.$$

把所有这类不等式加起来，我们可得

$$\frac{1}{2}p(R-a)<S(P)<\frac{1}{2}pR,$$

式中 p 为圆内接凸多边形 P 的周长，而 $S(P)$ 为它的面积。

如果这个不等式的右端以圆周长 l 代替 p，而左端以 $(l-a)$ 代替 p，则有加强不等式

$$\frac{1}{2}(l-a)(R-a)<S(P)<\frac{1}{2}lR,$$

或

$$\frac{1}{2}lR-\frac{1}{2}(aR+al-a^2)<S(P)<\frac{1}{2}lR.$$

从上面的不等式可看到：多边形 P 的面积 $S(P)$ 与 $\frac{lR}{2}$ 之

差小于$\frac{aR+al-a^2}{2}$。又因为内接多边形的面积与圆的面积之差小于aR（作图的条件），所以圆的面积与$\frac{lR}{2}$之差小于$aR+\frac{aR+al-a^2}{2}$，这就是说，如果a充分小时，则两值之差可小到任人所欲的程度，而这只在圆面积等于$\frac{lR}{2}$时才有可能．定理得证。

位于圆心角内的那部分圆域叫**扇形**（如图144）。扇形面积由下列公式给出：

$$S=\pi R^2\frac{\alpha}{360},$$

其中R是圆的半径，而α是扇形圆心角的度数。证明这公式的方法与证明弧长公式的方法相同。

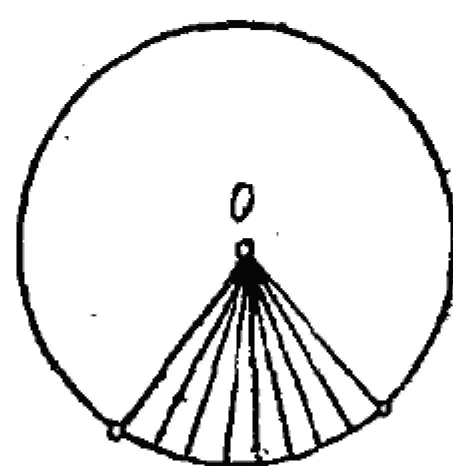


图 144

圆域与半平面的公共部分叫**弓形**（如图145）。不等于半圆域的弓形面积由下列公式给出：

$$S=\pi R^2\frac{\alpha}{360}\mp S_\triangle,$$

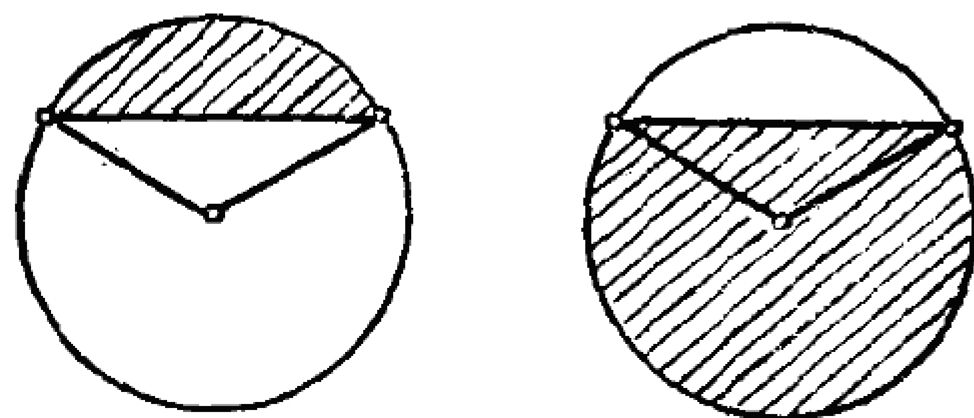


图 145

其中S_{Δ}是以圆心和弓形弧的端点为顶点的三角形的面积。如果$\alpha<180°$，则取"−"号；如果$\alpha>180°$，则取"+"号。

复习题及练习题

1．什么叫圆的周长？

2．试证明：不管a为一个什么样的正数，我们总可以在圆内作一个内接多边形，使其周长与圆周长之差小于a。

3．什么叫圆弧长？

4．证明：圆周长的公式

$$l=2\pi R.$$

5．证明：如果点C把弧$\overset{\frown}{AB}$分成两个圆弧$\overset{\frown}{AC}$和$\overset{\frown}{CB}$，则弧$\overset{\frown}{AB}$之长必等于弧$\overset{\frown}{AC}$及弧$\overset{\frown}{CB}$的长度之和。

6．试推导圆弧长的公式。

7．什么叫角的弧度？把30°和45°角化为弧度。

8．给出圆域面积的定义。

9．证明：不管a是一个什么样的正数，我们总可在圆内作内接凸多边形，使多边域面积与圆域面积之差小于a。

10．试证明：计算圆域的面积S的公式　$S=\pi R^2$，其中R是圆的半径。

11．什么叫扇形？怎样计算扇形的面积？

12．什么叫弓形？怎样计算弓形的面积？

第二部分　立体几何

§18. 立体几何的公理及其推论

立体几何　是几何的一个篇章，专门研究空间图形，和平面几何一样，立体几何也是通过有关定理的证明来建立几何图形的性质。由公理所表明的最简单图形的性质是几何的基础，**点**、**直线**和**平面**是空间的最简单图形。空间平面的引进迫使我们必须扩大公理体系。正因如此，我们引进公理组C，以便说明空间平面的基本性质，这组公理由下面三条公理组成：

C_1　任意一个平面都有平面内的点和平面外的点。

C_2　如果两个平面有一个公共点，那么它们相交于经过这点的一条直线。

这条公理肯定：如果两个不同的平面α和β有一个公共点C，那么必有一条既在平面α内又在平面β内的直线c。同时，如果点C既在平面α内又在平面β内，那么它也必然在直线c上。

C_3　过两条相交的直线，可作一平面，且只可作一平面。

这就是说，如果两条不重合的直线a和b有公共点C，那么必有一个平面γ，同时包含直线a和直线b，具有这种性质的平面只能有一个。

因此，立体几何的公理体系是由平面几何公理和公理组C组成。为了便于叙述，在这里重述几何的前两组公理：

I_1　任意一条直线，都有直线上的点和直线外的点。

I_2 **经过任意两点都可引出一条直线，而且只能引出一条直线。**

II_1 **直线上的三点，其中只能有一个点位于其它两点之间。**

II_2 **直线上的一点可把直线分割成两条射线．同一条射线上的两个点不可能被这条射线的端点分隔，这条射线上的端点只能分隔不同射线上的两个点．**

II_3 **直线可把平面分割成两个半平面．如果某一条线段的两个端点都在同一半平面内，则这条直线不可能与直线相交；如果线段的两个端点在不同的半平面内，则这条线段必与直线相交。**

立体几何公理的一些推论

定理18.1　过一条直线和这条直线外的一点，可以作一个平面，且只可作一个平面．

证明　设 a 是一条已知的直线，B 是直线 a 外的一点(如图146)，在直线 a 上取任意一点 A，根据公理 I_1 可知确实有这样一个点．按公理 I_2 过点 A 和点 B 作一条直线 b，直线 a 和 b 是两条不重合的直线，因为直线 b 上的点 B 不在直线 a 上．直线 a 和 b 有公共点 A，过直线 a 和 b 可以作一个平面 α（按公理 C_3），这个平面必经过直线 a 和点 B。

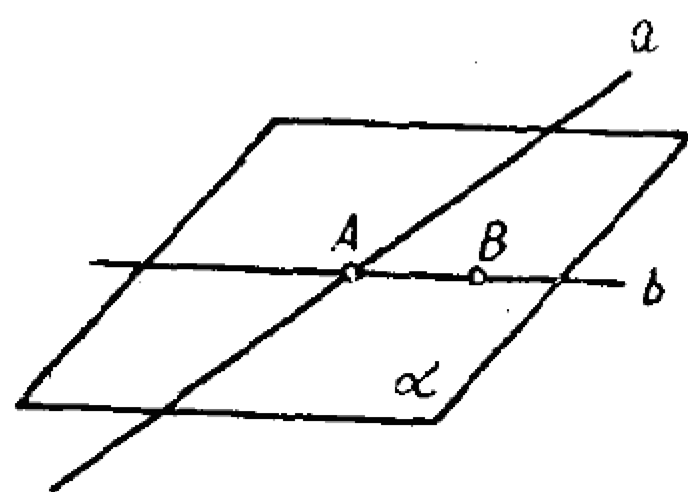


图　146

现在我们证明，过直线 a 和点 B 的平面只有一个平面 α。假设还有一个不与平面 α 重合的平面 α' 经过直线 a 和点 B，根据公理 C_2 可知：两个不相重合的平面 α 和 α' 必相交于一条直线．由此可得出，平面 α 和 α' 上的任意三个公共点都在一条

直线上。然而，点B和直线a上的两个点不可能在一条直线上，这点与已知的条件相矛盾。定理得证。

定理18.2　如果一条直线上有两点在一平面内，那么这条直线必在这平面内。

证明（参照图147）　设a是一条已知的直线，α是一个已知的平面，根据公理I_1，可取一点不在直线a上的点A，过直线a和点A作一平面α'。**根据定理可以肯定**：如果平面α'与平面α重合，则平面α必包含直线a，如果平面α'不与平面α重合，则平面α'和α相交于含有直线a上两个点的直线a'。根据公理I_2，可知直线a'与a重合，因此，直线a在平面α内。定理得证。

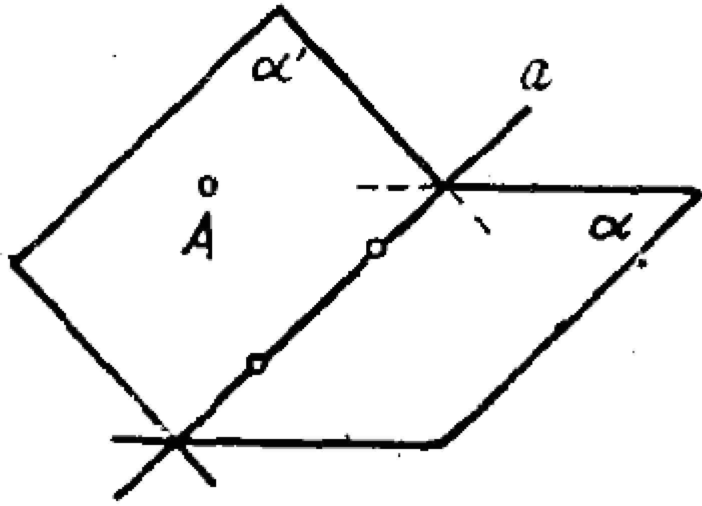


图　147

由定理18.2可推知：**一个平面与这个平面外的一条直线或者不相交，或者只相交于一点。**

定理18.3　过不在一条直线上的任意三点，可作一个平面，且只可作一个平面。

证明（参照图148）　设A、B、C是不在一条直线上的任意三点，作直线AB和AC。因为点A、B、C不在一条直线上，所以直线AB和AC不可能重合。根据公理C_3，过直线AB和AC作一个平面，这个平面内必有点A、点B和点C。

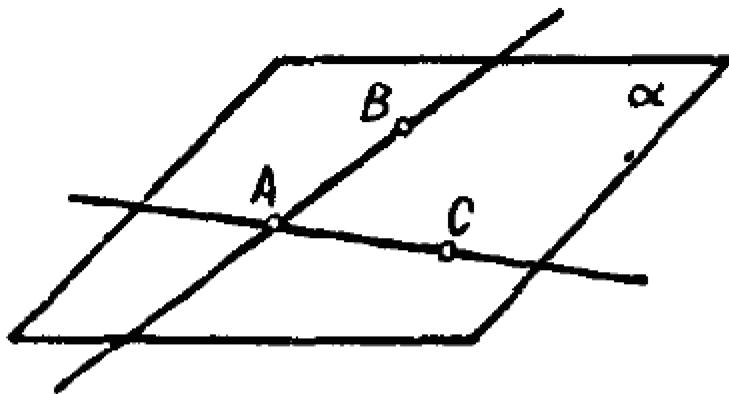


图　148

现在我们证明，过点A、B、C只可作一个平面α。根据定理18.2，可知过点A、B、C的平面包含直线AB和AC。根据公理C_3，可断定这个平面是唯一的。定理得证。

平面把空间分成两个半空间

定理18.4　平面把空间分成为两个半空间。如果点X和Y在同一半空间内，那么线段XY与这个平面不相交；如果点X和Y在不同的半空间内，那么线段XY必与这个平面相交。

证明　设α是一个已知的平面，取一点A使它不在平面α内，按公理C_1，得知确实存在着这样一个点。我们按下列规则把空间的不在平面α内的所有点分成两类：如果线段AX不与平面α相交，那么我们把点X归为第一类；如果线段AX与平面α相交，那么我们把点X归为第二类。因此，空间的不在平面α内的每一点X必归属于这两类中的一类。我们来证：空间的这种划分具有定理中所指出的性质。

设　点X和Y都是第一类的点。过三点A、X和Y作一平面α'，如果平面α'不与平面α相交，则在平面α'内的线段XY也同样不与平面α相交。假设平面α'与平面α相交（如图149），因为平面α和α'是两个不同的平面，所以它们相交于直线a。直线a把平面α'分成两个半平面，点X和Y在同一半平面内，即点A所在的半平面内。因此，线段XY不可能与直线a相交，从而，也不可能

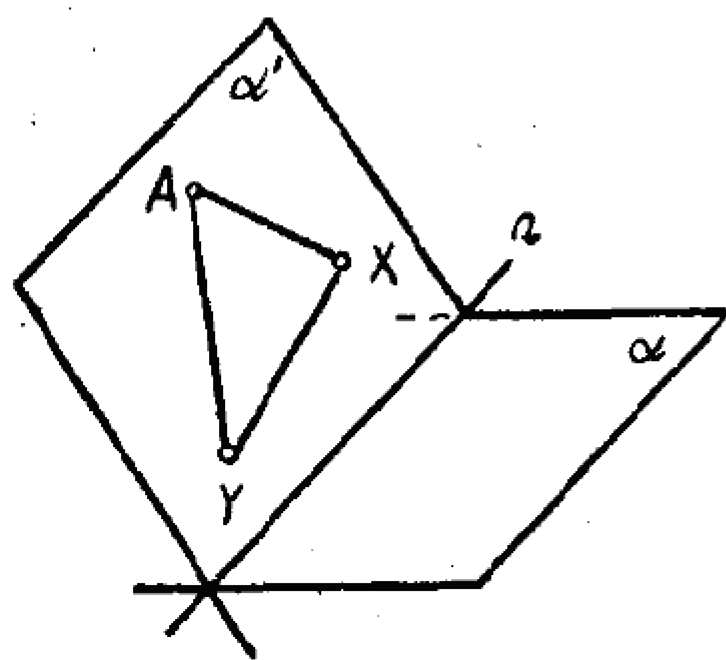


图　149

与平面 α 相交。

假如点 X 和 Y 都是第二类的点，那么平面α'明显地与平面α相交，理由是线段 AX 与平面α相交。点 X 和 Y，对直线 a 而言，位于同一半平面内，所以线段 XY 不可能与直线 a 相交，即不可能与平面α相交。

最后，如果点 X 属于一类，而点 Y 属于另一类，那么平面α'必与平面α相交。对直线 a 而言，X 点和 Y 点位于不相同的半平面内，因此线段 XY 必与直线 a 相交，即线段 XY 必与平面α相交。定理得证。

对公理I_1的分析 在本段结尾中我们对公理I_1作些分析，公理I_1在立体几何中包含的意义与平面几何中的意义是不同的。在平面几何中，“直线外的点”指的是在已知直线所在的平面上，但不在直线上的点。我们恰好利用这个概念建立起几何学上关于平面的概念。在立体几何中，公理I_1的结论，“直线外的点”指的是所有不在已知直线上的点，但我们用公理I_1不能直接推出这个点。在平面上，但不在直线上的点，需要特殊证明才能得证。证明如下：

设 α是一个已知的平面，a 是这个平面上的一条直线。现在证明：在平面α内，有不在直线 a 上的点。在直线 a 上取一点 A，在平面α外取一点 A'，过直线a和点 A' 作一平面α'（如图150），设点 B 是平面α'外的一个点，过直线AA'和点 B 作一个平面 β，平面 α 和平面 β 相交于经过点 A 的直线，这条直线上的所有点，除点 A 外，都在平

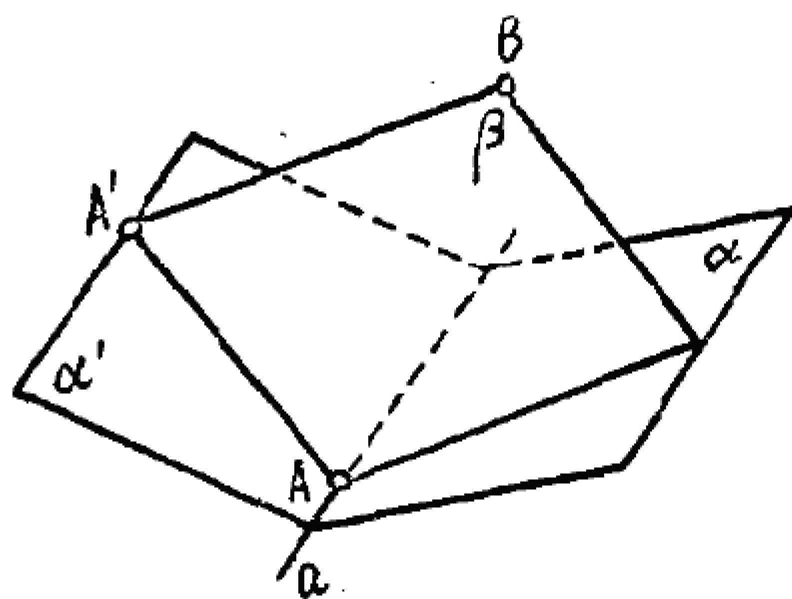


图 150

面α上，但不在直线 a 上，这些点正是我们所要求证的点。

习　题

1. 已知一条直线 a 和这条直线外的一点 A，求证：所有经过点 A 的，并与直线 a 相交的直线都在同一平面内。
2. 已知两条不在同一平面内的直线 a 和 b 及既不在直线 a 上，又不在直线 b 上的点 C，证明：过点 C 可作一条，且只可作一条与已知直线 a 和 b 相交的直线。
3. 已知直线a_1，a_2，a_3，…，如果其中任意两条直线都相交，证明：或者这些直线都过一点，或者它们都在同一平面内。
4. 证明：如果图形中任意四个点都在同一平面内，则这个图形是一个平面图形，即图形中所有点都在同一平面内。
5. 已知 2 n 个点A_1，A_2，…，A_{2n}和一个不经过其中任何一个点的平面α，证明：如果这些点双双连接成线段 $ApAg$，那么，平面α不可能与超过n^2条线段相交。

§19. 直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行关系

空间的平行线　两条空间的直线，如果在同一平面内且不相交，则称这两条直线**平行**。

定理19.1　过已知直线外一已知点，可作一条直线，且只可作一条直线与已知直线平行。

证明 设 a 是一条已知的直线，而 A 是这条直线外的一点（如图151），过直线 a 和点 A 作一平面 α，过平面 α 上点 A 作一条直线 a_1 与直线 a 相平行，现在我们证明，直线 a_1 是过点 A 唯一与直线 a 平行的一条直线。

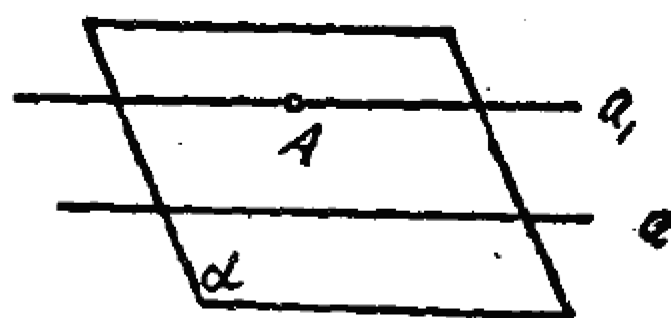


图 151

现在假设，过点 A 还有另一条与直线 a 相平行的直线 a_2，过直线 a 和 a_2 可作一平面 α_2。因为平面 α_2 过直线 a 和点 A，所以，根据定理18.1得知：平面 α_2 必应与平面 α 重合。现在根据平行公理，可得出直线 a_1 与直线 a_2 重合。定理得证。

定理19.2 如果直线a分别平行于直线b和c，则直线b和c必平行。

证明 在平面几何中，我们曾研究过直线 a、b 和 c 在同一平面内的情况。因此，现在我们假设三条直线 a、b 和 c 不在同一平面内，设 β 是直线 a 和 b 所在的平面，而 γ 是直线 a 和 c 所在的平面，平面 β 和 γ 是两个不相重合的平面（如图152）。

在直线 b 上取一点 B，过直线 c 和点 B 作一平面 γ_1，平面 γ_1 与平面 β 相交于直线 b_1，我们来证直线 b_1 与直线 a 相平行。

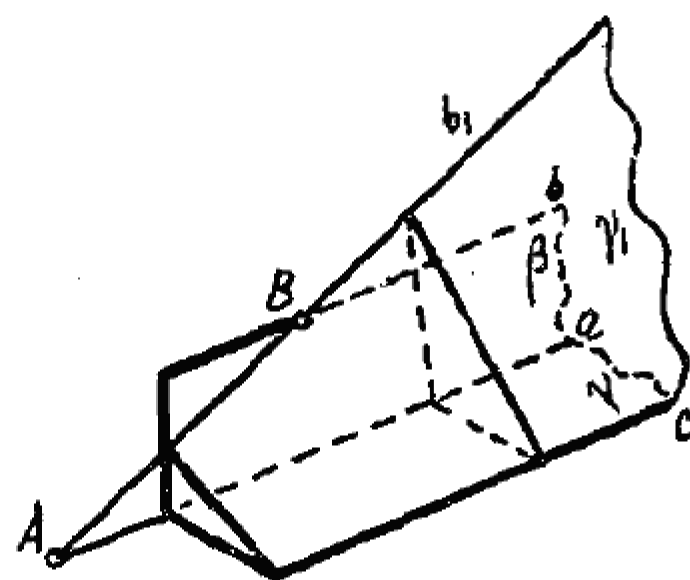


图 152

用反证法，假设直线 b_1 与直线 a 相交于某点 A，点 A 既属于平面 γ，又属于平面 γ_1。因此，点 A 位于这两个平面的交线上。这点与条件相矛盾，因为，直线 a 和 c 是两条平

行线，它们不可能有公共点，由此得知直线 b_1 平行于直线 a。

根据平行公理，与直线 a 平行的直线 b_1 必应与直线 b 重合。因为直线 b_1 与直线 b 重合，所以直线 b 和 c 位于同一平面内，即位于平面 γ_1 内，直线 b 和 c 不可能相交，否则这将与定理19.1相矛盾，因为这两条直线都平行于直线 a .由此可知，直线 b 和 c 位于同一平面内，且不相交，即是两条平行的直线. 定理得证。

直线与平面的平行关系 如果一条直线和一个平面没有公共点，则称这条直线和这个平面平行。

定理19.3 平面 α 外一条直线 a，如果与平面 α 内的一条直线 a_1 平行，那么直线 a 就与平面 α 平行。

证明（参照图153） 过直线 a 和 a_1 作一平面 α_1，因为直线 a 不在平面 α 内，所以平面 α 和平面 α_1 不重合，平面 α 和平面 α_1 相交于直线 a_1。假如直线 a 与平面 α 相交，那么，其交点也必将在直线 a_1 上.这点显然是不可能的，因为直线 a 与 a_1 是互相平行的直线。因此，可得出直线 a 不可能与平面 α 相交，这就意味着，直线 a 与平面 α 平行。定理得证。

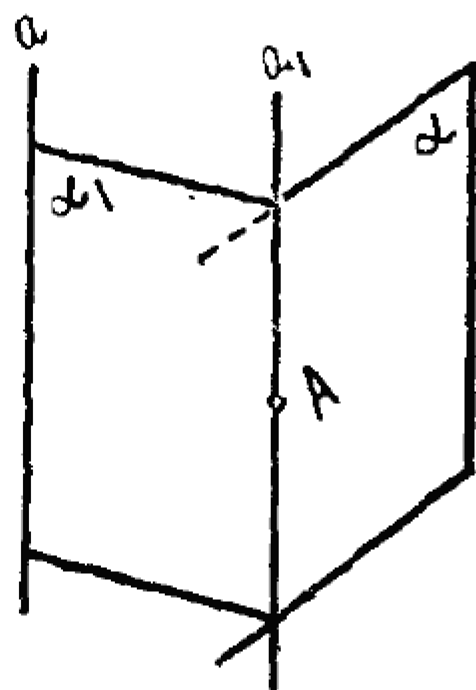


图 153

定理19.4 如果一条直线分别与相交的两个平面平行，那么这条直线必与这两个相交平面的交线平行。

证明 设 α 和 β 是已知的两个相交的平面，c 是这两个相交平面的交线，c_1 是一条分别与平面 α 和平面 β 平行的直线（如图154），需要证明，直线 c 与直线 c_1 平行。

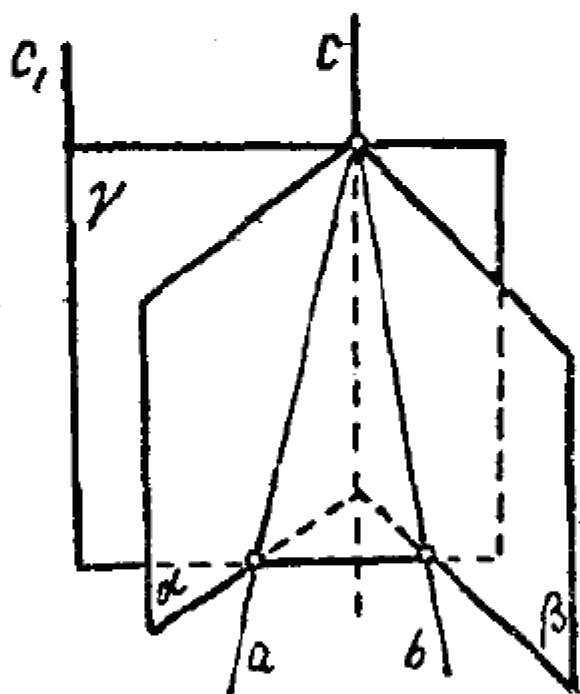


图 154

过直线c_1和直线 c 上某一点作一平面γ，平面γ分别与平面α和β相交于直线a和b，而直线a和b与直线c_1平行。实际上，直线a和b分别在平面α和β内，而平面α和β均平行于直线c_1，因此直线a及b不可能与直线c_1相交。根据平行定理，直线a和直线b必重合，因为直线a在平面α内，而直线b在平面β内，所以直线a和b必重合在平面α和β的交线c上。因此，直线c平行于直线c_1。定理得证。

平面与平面的平行关系 不相交的两个平面称为**平行平面**。

定理19.5 如果平面α分别与平面β内两条相交直线平行，那么平面α必与平面β平行。

证明 （参照图155） 设b_1和b_2是平面β内两条相交的直线，而平面α分别与直线b_1和b_2平行，平面α和β是两个不重合的平面。假设这两个平面相交于某条直线c，根据已知条件得知，直线b_1和b_2与平面α不相交，因而，也与平面α内直线c不相交。但是，根据平行公理，这是不可能的，因为直线b_1、b_2和c都位于同一平面内，即位于平面β内。从而可得出，直线b_1和b_2中至少有一条与直

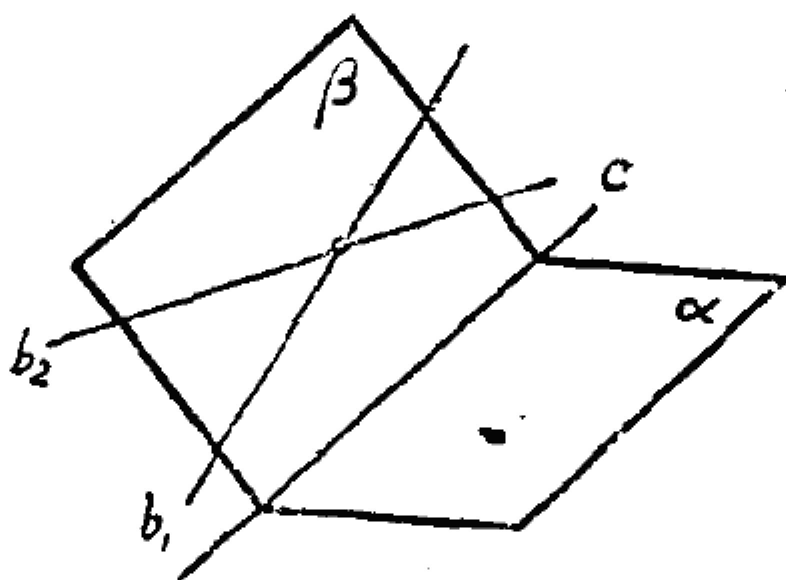


图 155

线 c 相交，这点便与定理条件相矛盾。因此，平面α与平面β不可能相交。定理得证。

定理19.6　过平面α外一个已知点A，可作一个，且只可作一个平行于平面α的平面。

证明　在平面α上作任意两条相交的直线a'和a''，过点A作平行于直线a'和a''的直线b'和b''，根据定理19.5，得知：过直线b'和b''的平面必平行于平面α。

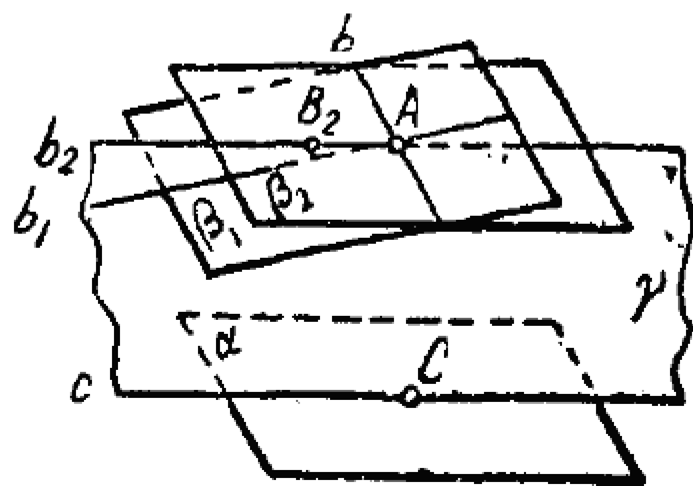


图 156

假设：过点A有两个平行于平面α的平面β_1和β_2(如图156)，设 b 是平面β_1和β_2的交线。在平面β_2内取一点B_2，并使B_2不在直线 b 上，在平面α内取一点C，再过三点A、B_2、C作一平面γ，平面γ与β_1和β_2相交于直线b_1和b_2，而平面γ与平面α相交于直线 c。因为直线 b_1和b_2 不与平面α相交，所以它们也不与直线 c 相交。根据平行公理，直线b_1和b_2必应重合。因此，平面β_1和β_2经过两条不同的，但相交的直线 b 和b_1，根据公理C_3，平面β_1和平面β_2重合。这点恰好与假设的条件相矛盾。定理得证。

平行平面间的平行线段

定理19.7　如果一条直线与一个已知的平面相交，那么，这条直线也必与平行于这个平面的任意平面相交。

如果一个平面与一条已知的直线相交，那么，这一个平面也必与这条直线的任意一条平行线相交。

证明　首先，证明定理的第一部分。设 a 是一条与平面β相交的直线，而β_1是一个与β平行的平面，现在我们证明，

直线 a 与平面β_1相交（参照图157—左）。

过直线 a 作一个与平面β_1相交的平面α，平面 α 与平面 β 相交于直线 b，平面α与平面β_1相交于直线b_1。假如直线 a 不与平面β_1相交，那么，直线 a 和 b 必然同时平行于直线b_1，然而，根据平行公理，不可能得出这样的结论。定理的第一部分得证。

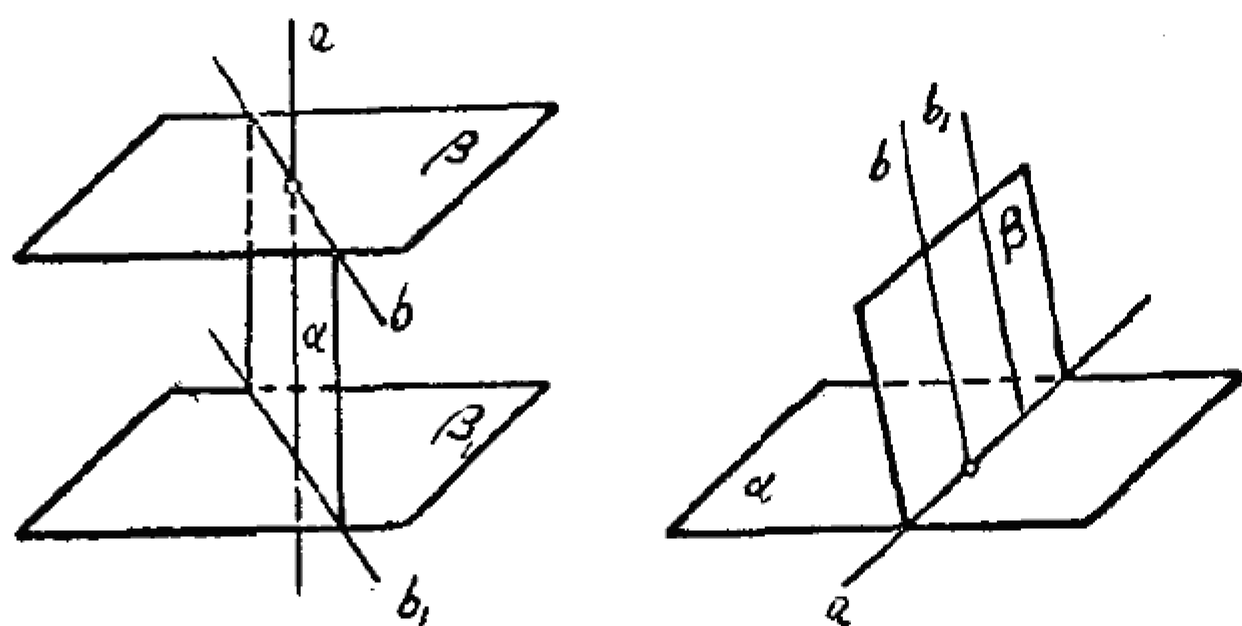


图 157

现在我们证明定理的第二部分．已知：平面 α 与直线 b 相交，求证：平面 α 与直线 b 的任意平行线b_1相交。

过平行线 b 和b_1作一平面β，平面 β 与平面 α 相交于直线 a（如图157—右）。假如平面 α 不与直线 b_1 相交，那么，直线 a 和 b 必然与直线b_1平行。然而，根据平行公理，这是不可能的。定理全部得证。

定理19.8　夹在两个平行平面间的平行线段相等。

证明　（参照图 158）设 α 和 β 是两个互相平行的平面，c_1 和c_2 是两条与平面 α 和 β 相交的，且彼此互相平行的直线。设直线 c_1 与两平面相交于点A_1及B_1，而直线c_2与两平面相交于点A_2及B_2。求证：线段A_1B_1等于线段A_2B_2。

四边形$A_1B_1B_2A_2$位于同一平面内，即平行线 c_1 和 c_2 所在的平面内。按定理的已知条件，可知这四边形的对边

A_1B_1和A_2B_2彼此平行。因为平面α和平面β平行，所以，另一组对边A_1A_2和B_1B_2也彼此平行。由此可得出：四边形$A_1B_1B_2A_2$是一个平行四边形，线段A_1B_1和A_2B_2是这个平行四边形的一组对边，因此，A_1B_1等于A_2B_2。定理得证。

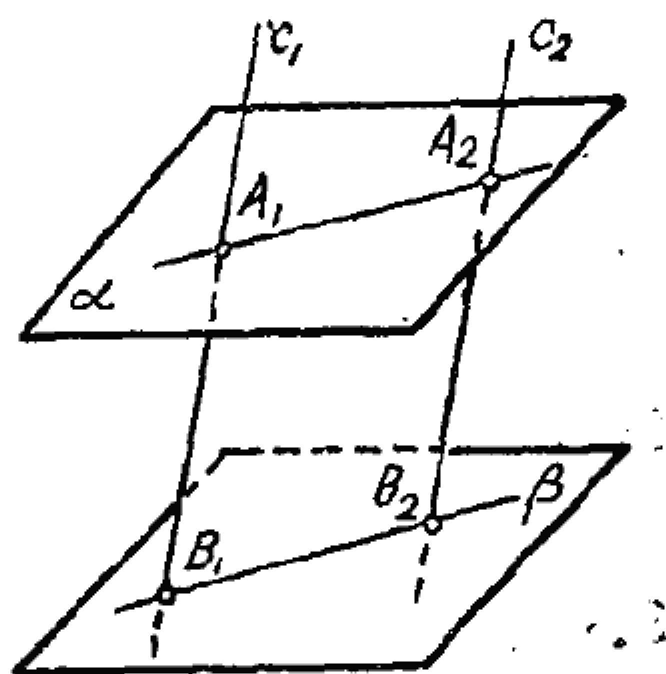


图 158

异面直线 不在同一平面内的两条直线，称为**异面直线**。因此，两条异面直线既不平行，也不相交。

任意两条异面直线分别位于两个平行平面内

证明 设a和b是两条异面直线，过直线a上任意一点A，作一条平行于直线b的直线a_1，过直线b上任意一点B，作一条平行于直线a的直线b_1（如图159），再过直线a和a_1作一平面α，过直线b和b_1作一平面β。平面α与平面β不相重合，因为，假如平面α与平面β重合，那么，直线a和b便将位于同一平面内，这点是与命题的条件相矛盾的。又因直线a和a_1均与平面β平行，所以平面α与平面β平行。结论得证。

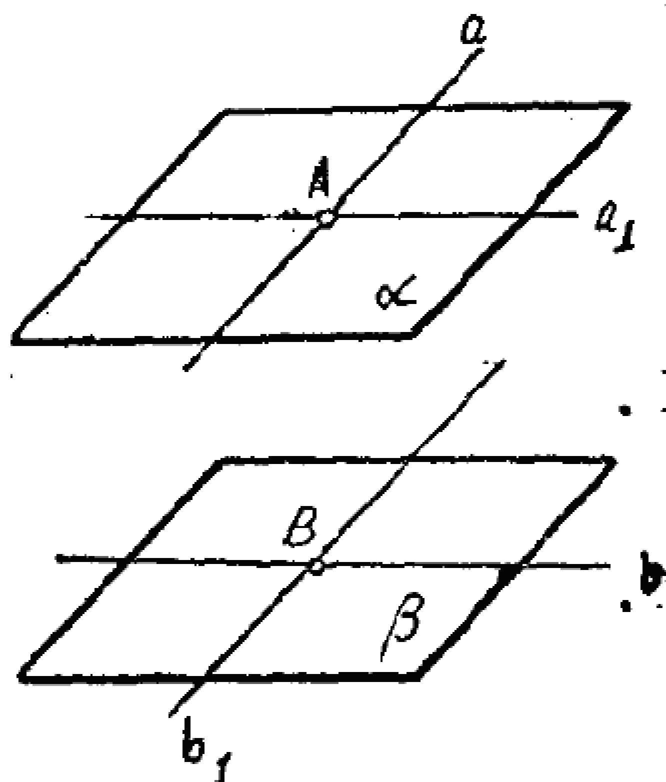


图 159

习　　题

1. 证明：三个不相重合的平面，或者相交于一点，或者交于一条直线，或者互相平行。
2. 证明：过已知一点平行于一已知平面的所有直线，必在同一个平面内。
3. 设 α_1、α_2、α_3 为三个平行的平面，而 a 和 b 是两条与 α_1、α_2、α_3 相交的直线，其交点分别为 A_1、A_2、A_3 及 B_1、B_2、B_3。试证明：这两条直线被这三个平行平面所截得的对应线段成比例，即

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\frac{A_3A_1}{B_3B_1}.$$

4. 已知 A_1、A_2、A_3、A_4 四点不在同一平面内，四点双双连结成六条直线：A_1A_2、A_1A_3、A_1A_4、A_2A_3、A_2A_4 和 A_3A_4，试证：平行于异面直线 A_1A_2 和 A_3A_4 的平面与另外四条直线相交。
5. 如果线段的两端点分别位于两条异面直线上，试证这些线段的中点轨迹为一平面。
6. 已知 A、B、C、D 四点不在同一平面内，证明：三对异面线段 AB 和 CD、AC 和 BD、AD 和 BC 的三条中点连线必相交于一点。

§20. 直线与直线、直线与平面、平面与平面垂直关系

直线与直线的垂直关系　在平面几何中同一平面内相交

直线的垂直定义是大家所熟悉的。现在我们要确定异面直线的垂直定义。为此，我们首先指出，垂直相交的直线具有如下性质。

定理20.1 如果直线a和b垂直相交，而直线a_1与b_1分别与其平行，那么，直线a_1和b_1也垂直相交。

证明 如果直线a、b、a_1、b_1位于同一平面内，则定理所指的性质是大家在平面几何中所熟悉的。因此，我们假设这四条直线不在同一平面内，直线a和b位于平面α内，而直线a_1和b_1位于平面α_1内（如图160）。根据定理19.3，可知直线a和b与平面α_1平行，根据定理19.5，可知平面α与平面α_1平行。

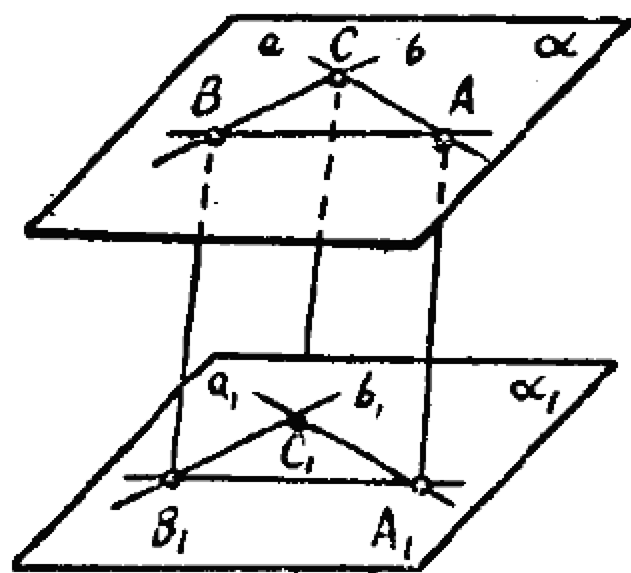


图 160

设 C是直线a和b的交点，而C_1是直线a_1和b_1的交点，在平行线a和a_1所在的平面内，作一条直线平行于直线CC_1，该直线与直线a及a_1交于A及A_1。同法，在平行线b和b_1所在的平面内，作一条直线平行于直线CC_1，该直线与直线b及b_1交于B及B_1。

四边形CAA_1C_1和CBB_1C_1是两个平行四边形，因为它们的每组对边互为平行。四边形ABB_1A_1也是一个平行四边形，因为它的一组对边AA_1和BB_1均与直线CC_1平行，所以AA_1和BB_1平行，另一组对边AB和A_1B_1分别位于两个平行的平面内，所以AB边平行于A_1B_1边。

因为平行四边形每组对边相等，所以$AB=A_1B_1$，$AC=A_1C_1$，$BC=B_1C_1$。根据全等三角形的第三判定法，可

知：三角形ABC与三角形$A_1B_1C_1$全等。因此，$\angle A_1C_1B_1=\angle ACB=90°$，即直线$a_1$与直线$b_1$相互垂直。定理得证。

对于两条异面直线来说，如果平行于它们的相交直线互相垂直，那么这两条异面直线称为垂直的异面直线。从这个定义和定理20.1中得知：不管彼此垂直的直线是相交的直线还是异面直线，平行于它们的相交直线必彼此垂直。

定理20.2　如果直线 a 垂直于直线 b，那么直线a与平行于直线b的任意一条直线b_1相互垂直。

证明　作两条相交直线a_2和b_2分别平行于直线a和b，因为题设直线a及b垂直，所以直线a_2及b_2垂直。根据平行线的性质可知：直线b_2平行于b_1。因此，直线a和b_1分别平行于相交的，且彼此垂直的两条直线a_2和b_2，所以a和b_1彼此垂直。定理得证。

直线与平面的垂直关系　如果一条直线和一个平面内的每一条直线都垂直，则这条直线与这个平面互相垂直。下面的定理给出直线与平面垂直的判定法。

定理20.3　如果直线 a 和平面 α 内的两条相交直线垂直，那么直线 a 必垂直于平面 α。

证明　（参照图161）设b和c是平面α内两条相交的直线，直线a垂直于直线b及c，A点是直线b和c的交点。首先，我们研究直线a经过点A的情况。

在平面α内，过点A作

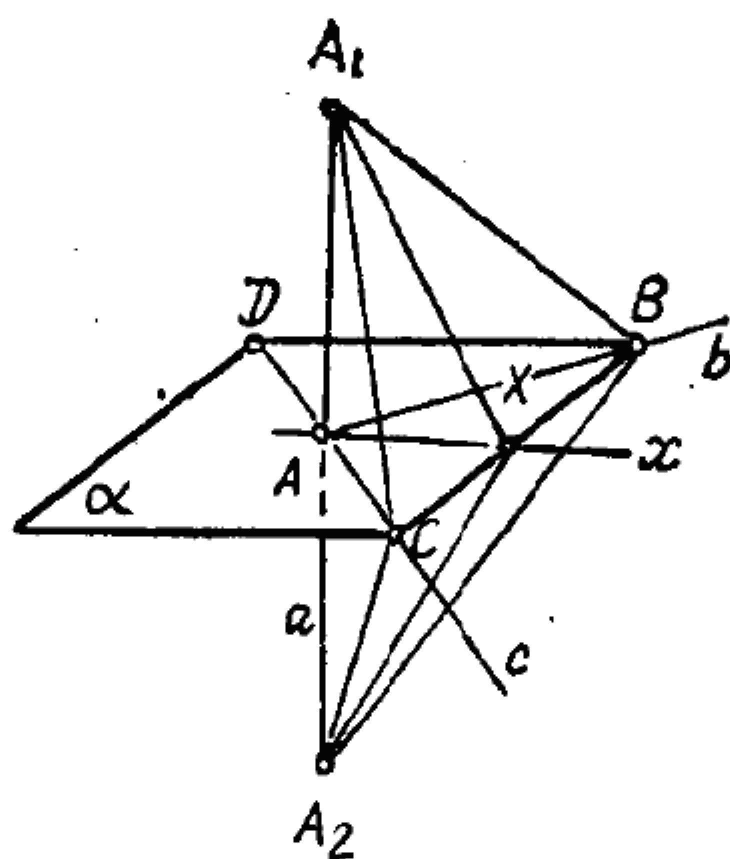


图　161

任意一条直线 x，求证：直线 x 垂直于直线 a。可以认为，直线 x 不与直线 b 和 c 重合。在直线 c 上，于点 A 的两侧取点 C 和 D，在直线 b 上取一点 B，使点 B 不与点 A 重合。直线 x 与三角形 CDB 的一边 CD 相交，根据平面几何中的已知定理，可知直线 x 与三角形 CDB 另外两边中的一边相交。为了明确起见，设直线 a 与 BC 边相交于点 X。

在直线 a 上，于点 A 的两侧取点 A_1 和 A_2，令线段 AA_1 等于 AA_2。根据作图的条件（$AA_1=AA_2$）及定理的已知条件（$AC\perp AA_1$），可知 AC 是三角形 A_1A_2C 中 A_1A_2 边上的高，因此三角形 A_1CA_2 是一个等腰三角形。同理可得出：三角形 A_1BA_2 也是一个等腰三角形。从而，根据全等三角形第三判定法，可证明 $\triangle A_1BC\cong\triangle A_2BC$。

因为三角形 A_1BC 与三角形 A_2BC 全等，所以 $\angle A_1BX=\angle A_2BX$。根据全等三角形第一判定法又可得出：$\triangle A_1BX\cong\triangle A_2BX$，对应边 $A_1X=A_2X$。因此，我们可以确信：三角形 A_1A_2X 是一个等腰三角形。因而三角形底边 A_1A_2 上的中线 AX，也是底边上的高线，这也就是说，直线 x 垂直于直线 a。

既然直线 a 与平面 α 内过点 A 的任意直线垂直，那么直线 a 必垂直于平面 α 内的任何直线 x_1。应当指出，直线 x 经过点 A 且平行于 x_1。根据定理20.2可知：直线 a 及 x 互相垂直，必导致直线 a 及 x_1 互相垂直。因而，直线 a 经过直线 b 及 c 的交点 A。定理得证。

现在研究一般情况，设直线 a 不经过点 A，过点 A 作直线 a_1 平行于 a，根据定理20.2，可知：直线 a_1 与直线 b 和 c 均垂直。根据已证部分，可知直线 a_1 与平面垂直。这就是说，直线 a_1 与平面 α 内任意一条直线 x 互为垂直。根据定理

20.2，可知：直线a_1的平行线a也垂直于任意一条直线x。因此，可得直线a和平面α垂直。定理得证。

由定理20.3，可得出一个重要推论，这个推论叫做**三垂线定理．如果A、B、C三点不在一条直线上，且AB、AC、BC三条直线中有两条直线和已知直线a垂直，那么第三条直线也和已知直线a垂直。**

事实上，过A、B、C三点可作一平面。已知直线a与这个平面内三条相交直线中的两条互相垂直，则这条直线a与这个平面垂直。这就是说，直线a与平面内任意条直线都垂直，其中也包括命题中所指的第三条直线。三垂线定理得证。

直线与平面的垂直性质

定理20.4　如果直线a和平面α垂直，那么直线a的任何平行线a_1都和平面α垂直，平面α的任何平行平面α_1也都和直线a垂直。

证明　直线a和平面α内任意一条直线x垂直。根据定理20.2，可得知直线a的平行线a_1也垂直于任一条直线x，从而可得知，直线a_1和平面α垂直。定理的第一个结论得证。

现在证明定理的第二个结论。设x_1为平面α_1内任意一条直线，过直线x_1作一个平面交平面α于直线x。因为直线x_1平行于直线x，而直线a又垂直于直线x，所以，根据定理20.2可得出，直线a也必垂直于直线x_1。这就意味着，直线a垂直于平面α_1。定理得证。

定理20.5　垂直于同一平面的两条直线互为平行，垂直于同一条直线的两个平面互为平行。

证明　设a和a_1是两条垂直于平面α的直线，假设直线a不与直线a_1平行。过直线a_1和平面α的交点B，作直线a_2

平行于直线a（如图162），根据定理 20.4，可得知直线a_2垂直于平面α。过直线a_1和a_2，作一个平面与平面α相交于直线b，因为直线a_1和a_2都垂直于平面α，所以a_1和a_2也都垂直于直线b，很显然，这是不可能的。因此，直线a_1和a_2必应重合。定理的第一个结论得证。

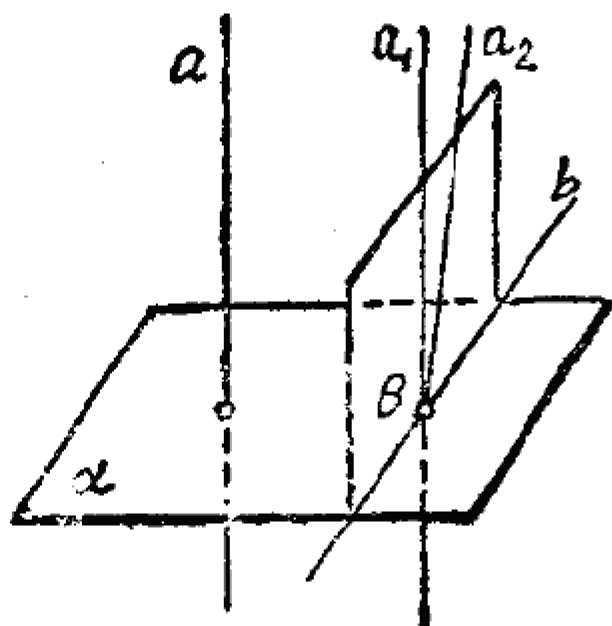


图 162

现在证明定理的第二个结论。设α和α_1是与直线b垂直的两个平面，假设平面α不与平面α_1平行，因而两个平面有公共点A。过A点作一条平行于直线b的直线b_1（如图163），根据定理20.4可得知：直线b_1垂直于平面α和α_1。现在，在平面α内取一点B，且点B不在平面α_1内，过直线b_1和点B，作一个平面，这个平面与平面α和α_1相交于两条不相重合的直线，这两条直线都与直线b_1在A点垂直相交，这显然是不可能的。因此，平面α与平面α_1必应互为平行。定理得证。

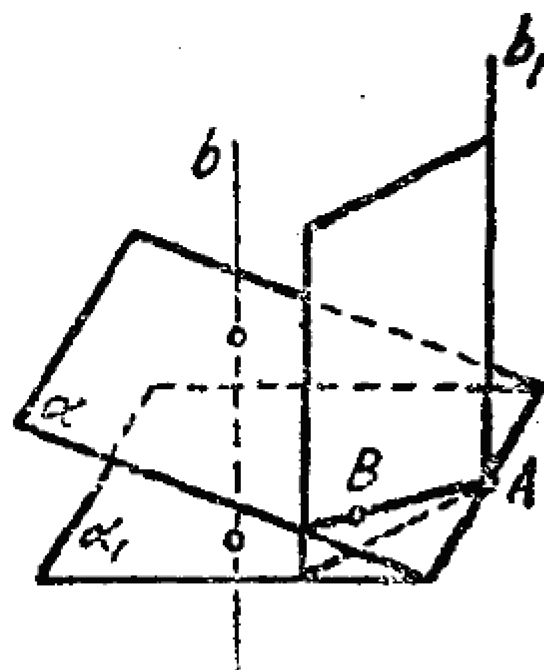


图 163

直线与平面垂直的判定

定理20.6　过一个已知点，可以作一个平面，且只可以作一个平面垂直于已知直线。

证明 （参照图164） 设A是一个已知的点，a是一条已知的直线，过直线a，作两个不相重合的平面β_1和β_2；过直线a上任意一点B，在平面β_1和β_2内分别作两条与直线a垂直的直线b_1和b_2；过直线b_1和b_2，作一个平面α，平面α内两条相交直线b_1和b_2均垂直于直线a，根据定理20.3，可得知直线a和平面α垂直。过点A作一平行于平面α的平面α_1，根据定理20.4，可得知平面α_1，就是过A点并垂直于直线a的平面。

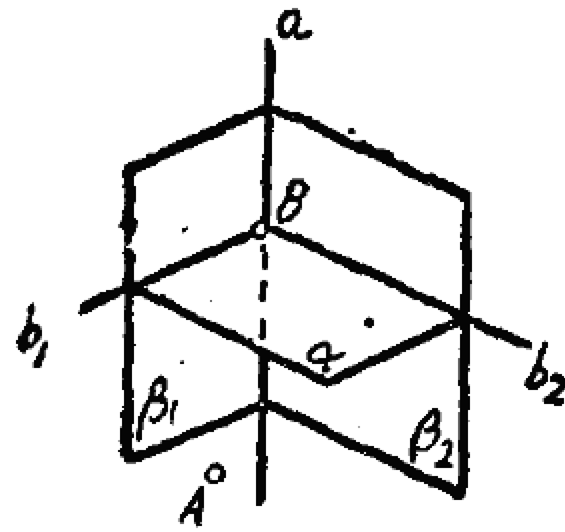


图 164

现在证明，过点A只可以作一个垂直于直线a的平面α_1。假设过点A还可以作一个垂直于直线a的平面α_2，而平面α_2不与平面α_1重合，根据定理20.5，可以肯定平面α_1和平面α_2互为平行，这是不可能的，因为这两个平面与直线a只有一个公共点A。因而其结果矛盾，定理得证。

定理20.7 过一个已知点，可以作一条直线，且只可以作一条直线垂直于一个已知的平面。

证明 （参照图165） 设A是一个已知点，而α是一个已知平面，在平面α内，作两条相交的直线b_1和b_2。按定理20.6，过直线b_1和b_2的交点沿直线b_1和b_2，作两个垂直于平面α的平面β_1和β_2。这两个平面与平面α相交于直线b_1和b_2。这两个平面（β_1和β_2）彼此相交于直线a，直线a垂直于直线b_1和b_2，因而也垂直于平面α。过点A作一条直线a的平行线a_1，根据定理20.4可得知，直线a_1就是过A点垂直于平

面α的直线。

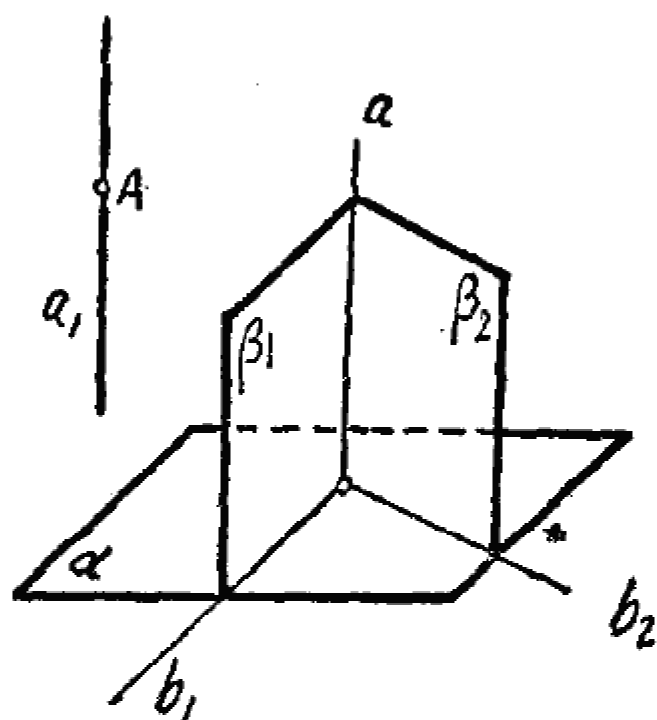


图 165

现在证明，直线a_1是过点A向平面α引出的唯一的一条垂线。假设过A点向平面α还可引另一条垂线a_2，直线a_2和直线a_1是不相重合的两条直线。根据定理20.5，可得出直线a_1和a_2是两条平行的直线。这是不可能的，因为两条直线有公共点A，这就出现矛盾。定理得证。

垂线和斜线 设α是一个平面，A是平面α外的一个点，B是平面α内的点(如图166)，如果从点A向平面α引作的直线AB垂直于平面α，那么线段AB叫做从A点向平面α引作的**垂线**。设C是平面α内异于点B的点，线段AC叫做从A点引到平面α的**斜线**。线段BC叫做斜线AC在平面α内的**射影**.

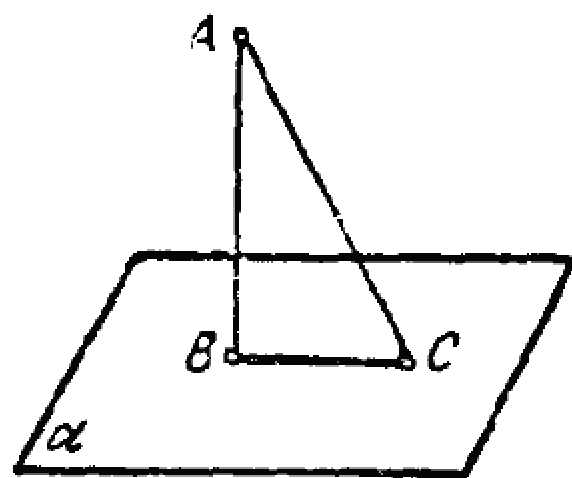


图 166

从平面外一点到平面引作的垂线和斜线，和在平面几何里，从直线外一点到直线引作的垂线和斜线，具有类似的性质。**在从平面外一点A到平面α引作的垂线和斜线中，垂线比任何斜线都短，较长斜线具有较长的射影.**

证明(参照图166) 三角形ABC是一个直角三角形，其中$\angle B$是一个直角。按勾股定理可得：

$$AC^2=AB^2+BC^2.$$

根据公式可推导出：$AC>AB$，这就是说，斜线AC比垂线AB长。另外，我们还可得出：斜线AC延长时，斜线AC在平面α内的射影BC也将随之延长。这便证明：较长斜线具有较长的射影。结论得证。

从点A到平面α的垂线长叫做从点A到平面α的**距离**。**点A到平面α的距离指的是从点A到平面α内所有点的诸距离中的最短者**。

在平面几何中，我们知道两条平行线是等距离的。与此类似，在立体几何中，两个平行平面是等距离的。也就是说，**如果α和β是两个平行的平面，那么平面α内任意两个点到平面β的距离相等**。

证明（参照图167） 设A_1和A_2是平面α内两个不重合的点，过点A_1和A_2，分别向平面β引垂线A_1B_1和A_2B_2。根据定理20.5，可得知直线A_1B_1和A_2B_2是两条互为平行的直线，并且它们位于同一平面内，直线A_1A_2和B_1B_2也是两条互为平行的直线。因此，四边形$A_1A_2B_2B_1$是一个平行四边形，因为平行四边形对边相等，所以线段A_1B_1等于线段A_2B_2结论得证。

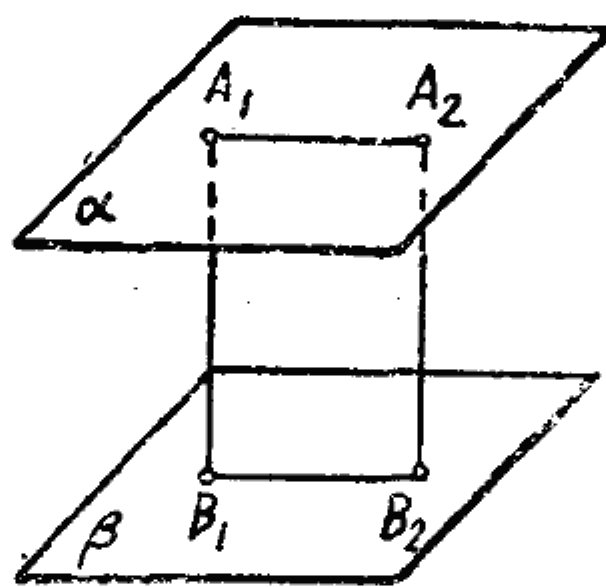


图 167

直线与它所平行的平面，也具有类似的性质，即：**如果a是一条直线，α是与直线a平行的平面，那么直线a上所有点到平面α的距离都相等**。证明这个结论，同上面证明两平行平面间距离相等的方法相同，不再重复。

已知a和b是两条异面直线，A和B分别是直线a和b

上的点。如果直线 AB 既垂直于直线 a，又垂直于直线 b，那么线段 AB 叫做异面直线 a 和 b 的**公垂线**。

两条异面直线间有一条、而且只有一条公垂线。

证明（参照图 168）设 a 和 b 是两条已知的异面直线。正如 §19 最后部分所证明的那样，两平行平面 α 和 β 必过异面直线 a 及 b。从直线 a 上的任意一点 C，向平面 β 作一条垂线 CD。过点 D 作一条直线平行于 a，这条直线与直线 b 交于某点 B。再过点 B 作一条直线平行于 CD，这条直线与直线 a 交于点 A。直线 AB 垂直于平面 α 和 β，因而也垂直于异面直线 a 和 b。由此，可得出线段 AB 是异面直线 a 和 b 的公垂线。

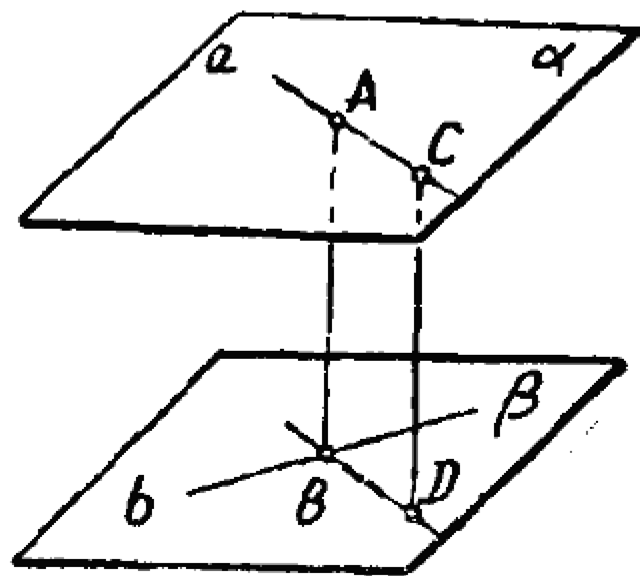


图 168

现在我们证明 AB 是异面直线 a 和 b 的唯一公垂线。假设还有另外一条公垂线 A_1B_1。直线 BD 与直线 a 平行。因此，直线 AB 和 A_1B_1 既垂直于直线 a 和 b，又垂直于平面 β。AB 平行于 A_1B_1。由此，我们便可得到，直线 AA_1 和 BB_1，即直线 a 和 b 位于同一平面内。而这是不可能的，因为直线 a 和 b 是两条异面直线。结论得到证明。

平面与平面的垂直关系　设 α 和 β 是相交在直线 c 的两个平面。作一个垂直于直线 c 的平面 γ（如图169）。平面 γ 与平面 α 和 β 相交于直线 a 和 b。如果直线 a 垂直于直线 b，那么，平面 α 与平面 β **互相垂直**。

如此确定平面 α 和平面 β 的垂直关系，与如何取平面 γ 无关。确实，我们还可作垂直于直线 c、且不与平面 γ 重合的

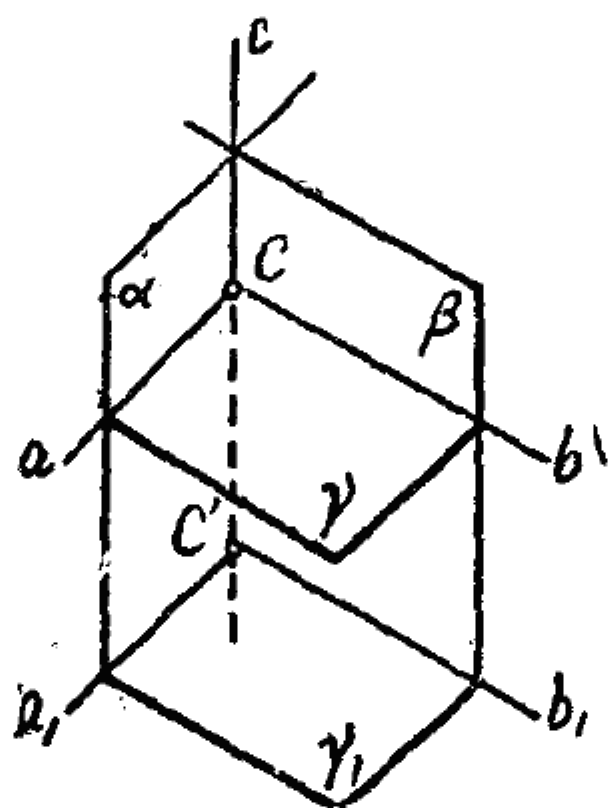


图 169

平面 γ_1。平面 γ_1 和平面 α 和 β 相交于直线 a_1 和 b_1。平面 γ 与平面 γ_1 都与直线 c 垂直，所以平面 γ 和 γ_1 互为平行。由此，可得出直线 a 平行于直线 a_1，直线 b 平行于直线 b_1。而根据定理20.1，直线 a 垂直于直线 b 导致直线 a_1 垂直于直线 b_1。结论得证。

定理20.8　如果平面α和平面β内的任意一条直线垂直，那么平面α和平面β互为垂直。

证明（参照图170）

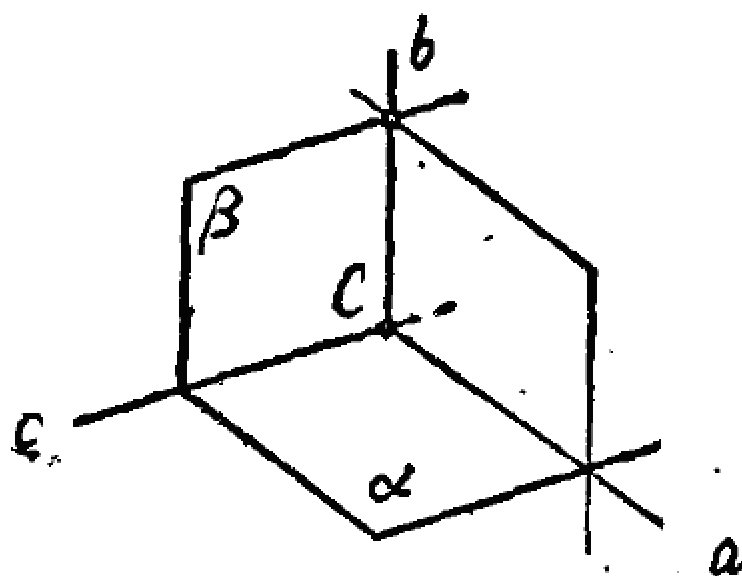


图 170

设 c 是平面 α 和平面 β 的交线，而 b 是平面 β 内垂直于平面 α 的一条直线。在平面 α 内，过直线 b 和 c 的交点 C 作一条垂直于直线 c 的直线 a。

因为直线 a 和 c 位于平面 α 内，而平面 α 与直线 b 垂直，所以直线 b 垂直于直线 a 及 c。直线 a 垂直于直线 c（作图的条件），因而过直线 a 和 b 的平面与直线 c 垂直，因为直线 a 和 b 互为垂直，所以过直线 a 和 b 的平面 α 和 β 互相垂直。定理得证。

由定理20.8，可得出如下**推论：如果平面β过垂直于平面α的直线b，那么平面β也垂直于平面α。**

定理20.9　如果直线a和平面α均垂直于平面β，那么直

线 a 可能在平面 α 内，也可能平行于平面 α。

证明 设 c 是平面 α 和平面 β 的交线(如图171)。作平面 γ_1 垂直于直线 c。平面γ_1与平面 α 和 β 相交于互相垂直的直线a_1 和 b_1。因为直线a_1垂直于直线 c 及b_1，所以直线a_1必垂直于平面β。根据定理20.5，可以得出直线a_1平行于直线 a。如果直线 a 不在平面 α 内，那么根据定理19.2，直线 a 与平面 α 内的直线a_1平行，直线 a 平行于平面 α。定理得证。

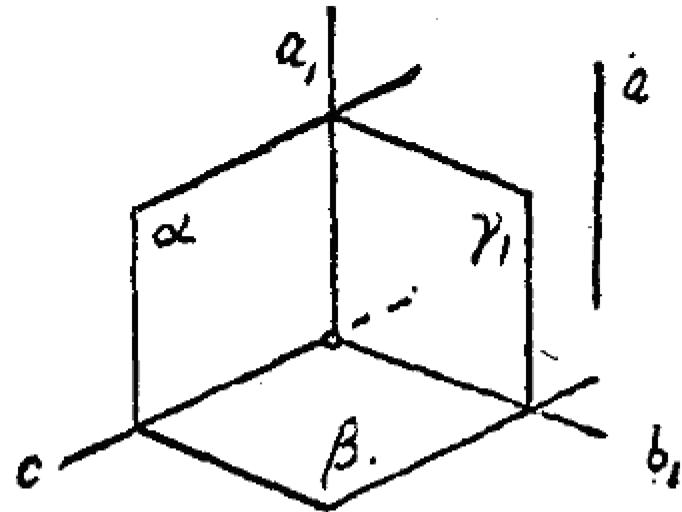


图 171

由定理20.9，可以得出下述推论，**如果平面 α 和平面 β 互相垂直，那么从平面 α 内任意点向平面 β 所作的垂线必在平面 α 内。**

定理20.10 已知 α 和 β 是两个相交的，但不是重合的平面，γ 是垂直于平面 α 和 β 的平面，那么平面 γ 必垂直于平面 α 及 β 的交线 c。

证明（参照图172） 取一个既不在平面 α 内、又不在平面 β 内的点，过这个点向平面 γ 作一条垂线c_1。根据定理20.9，可知直线c_1与平面 α 和 β 平行。根据定理19.4，可得出直线c_1与直线 c 互相平行。现在根据定理20.4，可得知直线 c 垂直于平面 γ。定理得证。

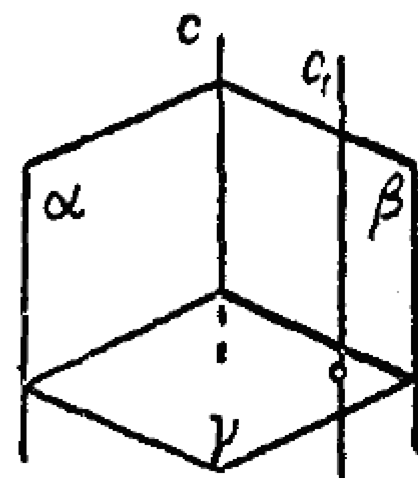


图 172

定理20.11 设 β 是一个平面，b 是一条不与平面 β 垂直

的直线．过直线 b 可以作一个，而且只能作一个垂直于平面 β 的平面．

证明（参照图173） 过直线 b 上任意一点，作平面 β 的垂线 b_1．根据定理20.8，可得出经过直线 b 和 b_1 的平面 γ 必垂直于平面 β．

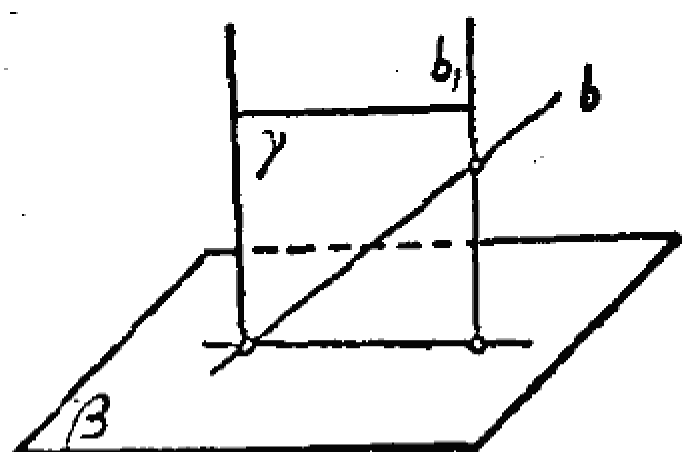


图 173

现在假设，经过直线 b 还有另外一个平面 γ_1，也垂直于平面 β．根据定理20.9，可断定直线 b_1 在平面 γ_1 内。按公理 c_3，可得知平面 γ 和平面 γ_1 必应重合。这与假设是矛盾的。定理得证。

习　　题

1．证明：过一已知点所作垂直于已知直线的诸直线必位于同一平面内。

2．证明：过一已知点可作一条、而且只能作一条垂直于两条已知的不平行的直线。

3．证明：过一点不可能作四条互相垂直的直线。

4．A、B、C、D 是不在同一平面内的四个已知点，两点双双连结成六条线段．证明：过线段中点并与线段垂直的六个平面相交于一点。这点到已知四点的距离相等．

5．证明：与已知两点 A 和 B 等距离点的轨迹是一个垂直于线段 AB 中点的平面。

6．已知一个三角形 ABC，对平面 α 而言，位于同一半空间

内，a、b、c 是这三角形三顶点到平面α的距离。

证明：三角形ABC的重心（三条中线的交点）到平面α的距离等于$\frac{a+b+c}{3}$。假如，对平面α而言，三角形的顶点A和B位于同一半平面内，而顶点C位于另一个半平面内，那么这距离有何变化？

7. 证明：与两个相交平面等距的点的轨迹是两个平面。
8. 从已知一点向经过一条已知直线的所有平面作垂线，试证明：垂足的轨迹是一个圆。
9. 从一已知点向一个已知平面作等长斜线，试证明：斜线足的轨迹是一个圆。

§21. 直线与直线、直线与平面、平面与平面所成的角

两条直线的夹角 两条直线相交，组成邻角和对顶角。对顶角相等，邻角与其互补成二直角。这些角中最小的角叫做两条直线所夹的**主值**。显然，两条直线所夹的主值小于90°。下面我们讲两条直线所夹的角就是指主值。

异面直线的交角是指平行于异面直线的两条相交直线所成的角。我们证明：这个角的大小与取什么样的相交直线无关。用证明定理20.1（§20）的方法，便可证明这个结论。

设 a_1和a_2是两条直线，它们相交于点A并与已知的异面直线平行，设b_1和b_2是另一对相交于点B的这样直线。假设a_1、a_2、b_1、b_2不在一个平面内（图174）。直线a_1和a_2位于平面α内，而直线b_1和b_2位于平面β内。因为直线a_1和a_2与

直线b_1和b_2互相对应平行，所以平面α与平面β也平行. 在直线a_1及a_2上各取异于点A的点A_1及点A_2，然后作直线A_1B_1及A_2B_2均平行于直线AB. 四边形AA_1B_1B，$AA_2B_2A_2$及$A_1A_2B_2B_1$均为平行四边形，因此，$AA_1=BB_1$，$AA_2=BB_2$，$A_1A_2=B_1B_2$. 根据全等三角形第三判定法，三角形AA_1A_2和三角形BB_1B_2是全等三角形. 因为两个三角形全等，所以直线a_1和a_2、b_1和b_2所夹的主值相等，即$\angle A$等于$\angle B$.

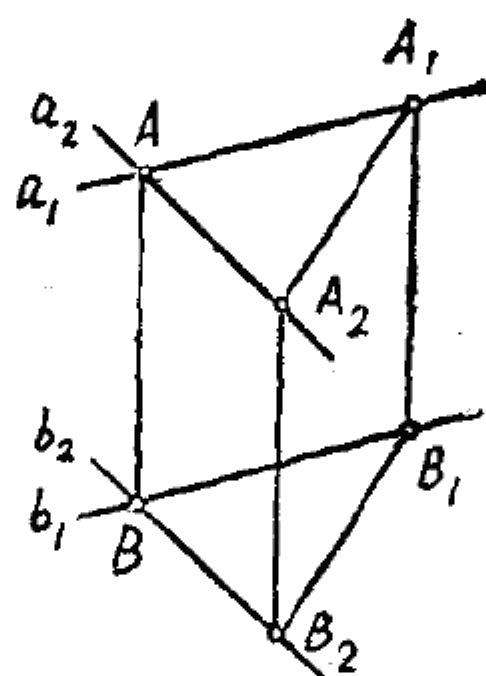


图 174

当直线a_1、a_2、b_1、b_2在同一平面时，可在另一平面内，分别作a_1和a_2、b_1和b_2的平行相交直线c_1和c_2. 根据上述证明，直线a_1和a_2、b_1和b_2间的夹角均等于直线c_1和c_2间的夹角，因而它们彼此相等.

我们已给出了关于两条相交直线的夹角及两条异面直线的交角的概念. 现在让我们以下面的定义来补充关于角的概念：两条平行直线，或两条重合直线所成的角等于零度. 给出关于两条平行直线或两条重合直线所成的角的概念之后，今后我们再证明关于角的定理时，就无需再讨论这类特殊的角.

定理21.1　设a_1和a_2是两条直线并且b_1和b_2是与它们平行的直线，那么直线a_1和a_2所夹的角等于直线b_1和b_2所夹的角.

证明　如果直线a_1和直线a_2互相平行或者互相重合，那么直线b_1和b_2也必然互相平行或者互相重合. 在这些情况

下，直线a_1和a_2的夹角与b_1和b_2的夹角均等于零，因而两角相等。如果直线a_1和a_2、b_1和b_2相交，则夹角相等，这点上面已论证过。由两条相交直线夹角相等的性质，可以推论出两条异面直线的交角也相等。定理得证。

直线与平面所成的角 设α是一个已知的平面，a是一条直线。直线a与平面α所成的角由下列方法确定。如果直线a与平面α平行，或直线a在平面α内，那么直线a与平面α所成的角等于零；如果直线a垂直于平面α，则直线a与平面α所成的角等于90°。

设直线a和平面α相交，但不垂直于平面α。经过直线a，作一个垂直于平面α的平面(如图175)。这个平面与平面α相交于直线$\bar{a}$，直线$\bar{a}$是直线a在平面α内的射影。直线a和$\bar{a}$所夹的角，即直线a和它在平面α内的射影所成的角，就叫做直线a和平面α所成的角。

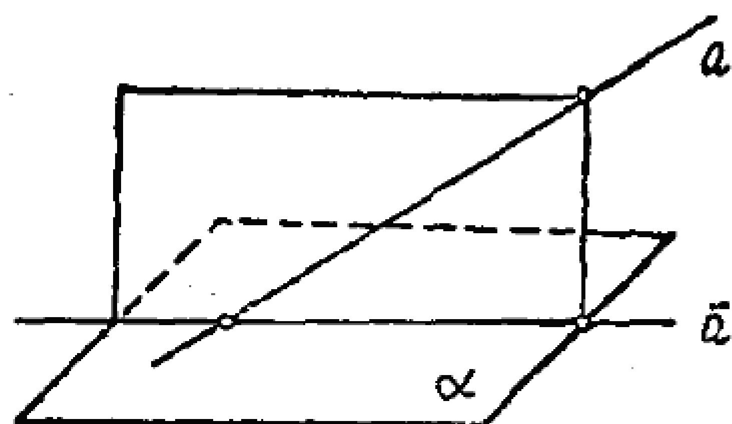


图 175

定理21.2 直线a与平面α所成的角，和直线a与平面α的垂线所成的角互为余角。

证明 如果直线a在平面α内，或与平面α平行，那么直线a与平面α所成的角等于零。然而，此时直线a与平面α的垂线所成的角等于90°。很明显，两角互为余角。如果直线a垂直于平面α，那么直线a或者与平面α的垂线相重合，或者互相平行。此时，直线a与平面α所成的角等于90°，但与平面α的垂线所成的角等于零。定理的结论明显可证。

现在让我们研究一般的情况。已知直线a和平面α相交

于点A(如图176),过点A作直线n垂直于平面α。三条直线a、$\bar{a}$和n位于同一平面，即直线a投影到平面α的那个平面。因为直线n与$\bar{a}$的夹角等于直角，所以直线a与n的夹角和直线$\bar{a}$与a的夹角互为余角。定理得证。

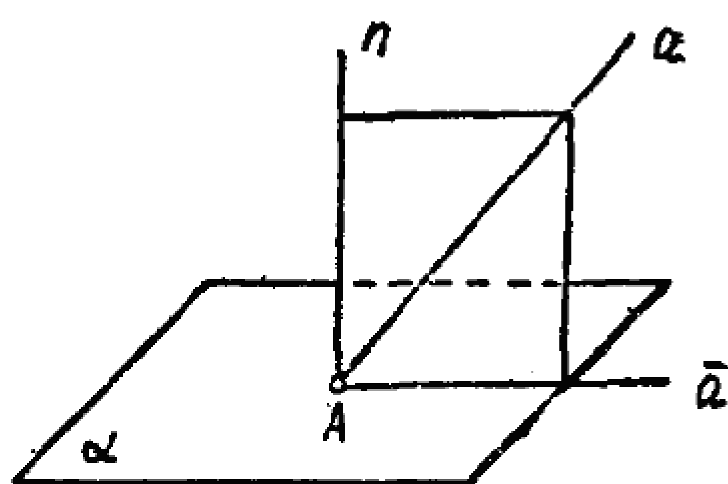


图 176

定理21.3　已知a和b是两条互相平行的直线，α和β是两个互相平行的平面，那么直线a与平面α所成的角必等于直线b与平面β所成的角。

证明　设a'和b'是两条分别垂直于平面α和β的直线，直线a'和b'或者互为平行，或者相重合。根据定理21.1可得知，直线a与a'所夹的角等于直线b与b'所夹的角。因而，它们的余角也必相等。根据定理21.2即可以得到：直线a与平面α所成的角等于直线b与平面β所成的角。定理得证。

平面与平面所成的角　现在我们确定平面与平面**所成的角**(或称**交角**)的概念。如果平面α与平面β平行或重合，那么我们说，平面α与β所成的角等于零。设平面α与平面β既不重合，又不平行，它们相交于某一条直线c(如图177)。作平面γ垂直于直线c，这平面γ分别交平面α及β于直线a及b。我们取直线a及b的夹角作为平面α及β的交角，可见，平面α与β的交角大小和平面γ在交线c上顶点

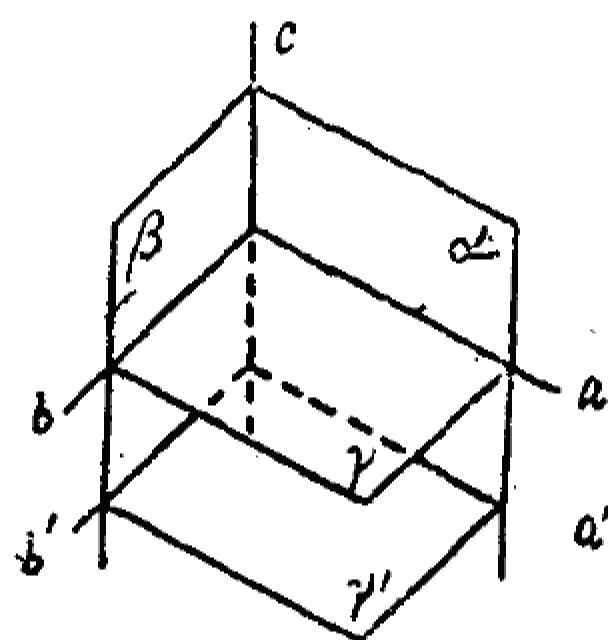


图 177

的位置无关。事实上，设γ'为垂直于直线 c 的另一个平面，平面γ'分别交平面 α 及 β 于直线a'及b'，而a'及b'平行于 a 及 b。因此直线a'及b'的夹角等于直线 a 及 b 的夹角。

定理 21.4　平面 α 和 β 的交角等于两个平面的垂线 a 与 b 的夹角。

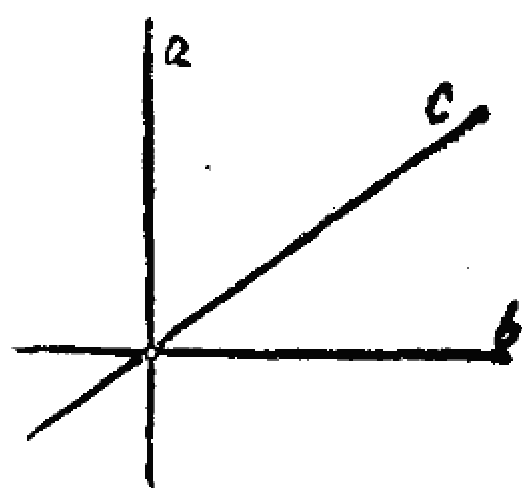


图　178

证明　首先，我们研究下面的性质，设 a 和 b 是同一平面内互为垂直的两条直线，c 是这平面内过直线 a 和 b 交点的任意一条直线。直线 c 与直线 a 和 b 所成的角互为余角（图178）。现在让我们来证明定理。

如果平面 α 和 β 互为平行或相重合，那么这两个平面的垂线 a 和 b 也必将平行或相重合。此时，平面 α 与平面 β 所成的角，和直线 a 与直线 b 所夹的角都等于零。因此，平面 α 与 β 的交角等于它们垂线的夹角。

现在设平面 α 与 β 既不重合，又不平行，因而它们相交于某一条直线 c。作一个垂直于直线 c 的平面 γ（如图179）。平面 γ 与平面 α 和 β 相交于直线a_1和b_1，而平面 γ 与直线 c 相交于点C，过点C作直线 a 和 b，分别垂直于平面 α 和 β，直线 a 和 b 都在平面 γ 内。

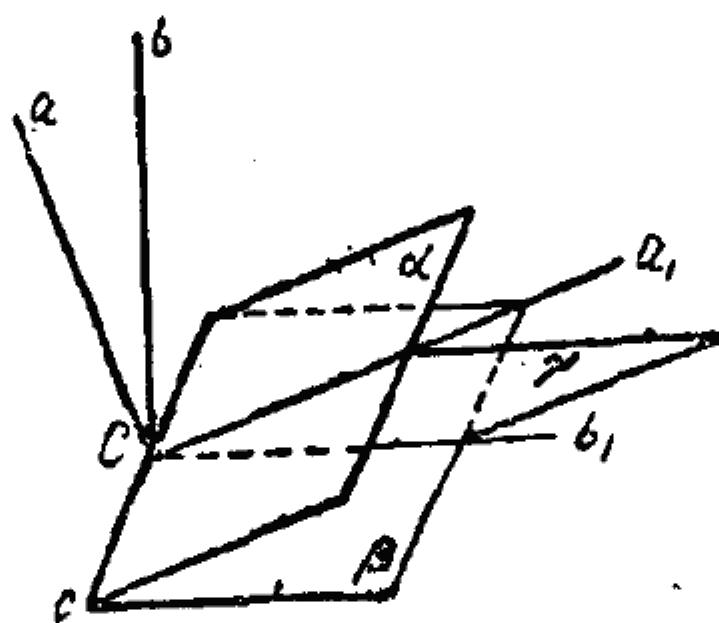


图　179

如上所证，直线a_1与 b 所夹的角，和直线a_1与b_1所夹的角互为余角。直线 a 与 b 所夹的角，和直线a_1与 b 所夹的角

互为余角。因此，直线a_1与b_1所夹的角等于直线a与b所夹的角。这正是我们所要求证的。

定理21.5　如果平面α平行于平面α'，而平面β平行于平面β'，那么平面α与β所成的角，等于平面α'与β'所成的角。

证明　作平面α的垂线a，直线a也必垂直于平面α'。同理，平面β的垂线b也必垂直于平面β'。根据定理21.4，两个平面的交角等于两个平面的垂线的夹角。因此，平面α和平面β的交角与平面α'和β'的交角等于同一值，即直线a及b的夹角。定理得证。

习　　题

1. 已知A、B、C三点不在同一条直线上。如果直线CA和CB与直线AB组成角α和角β，而$\alpha+\beta<90°$，问直线CA与CB的夹角等于多少？
2. 已知α是一个平面，a是与平面α相交的直线，而x是平面α内的任意一条直线，试证明：直线a与x的夹角不小于直线a与平面α的交角。
3. 已知a是一条直线，而α_1、α_2、α_3是直线a与三条互相垂直的直线所夹的角，试证：
$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1.$$
4. 设　α_1、α_2、α_3是直线与三个互相垂直平面所成的角，证明：
$$\sin^2\alpha_1+\sin^2\alpha_2+\sin^2\alpha_3=1.$$
5. 已知：直线a和b与三条互相垂直的直线所夹的角为α_1、α_2、α_3及β_1、β_2、β_3，而直线a与b所夹的角为ϕ，

证明：

$\cos\phi=\cos\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cos\beta_2+\cos\alpha_3\cos\beta_3$.

§22. 二面角、三面角和多面角

二面角和三面角的定义 已知α和β是两个相交于直线c的平面，直线c把平面α和β各分成两个半平面。平面α和β的半平面用α'和β'表示(如图180)。半平面α'和β'所组成的图形叫做**二面角**，而两个半平面α'和β'叫做二面角的**面**。直线c叫做二面角的**棱**。作任意平面γ垂直于直线c。这平面交半平面α'和β'于射线a'和b'，射线a'和b'所组成的角叫做二面角的**平面角**。可以借助于二面角的平面角来度量二面角的大小。同一个二面角的所有平面角都相等，而且，平面角的大小与其顶点在棱上的位置无关。

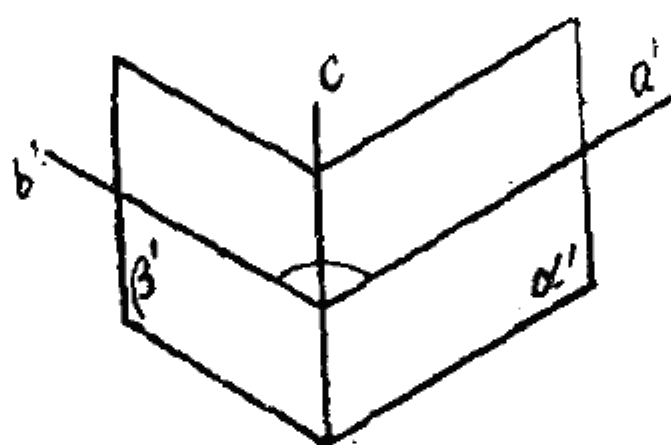


图 180

平面α和β所组成的角度，与它们的半平面α'和β'所组成的角度，就其实质来讲是有差别的。平面和平面所组成的角度总不可能大于90°，然而，半平面和半平面所组成的角度可能取从0°到180°间的任一值。如果二面角小于或等于90°，那么二面角的大小等于两个平面的交角，此时二面角的棱是两个平面的交线。不然的话，两个平面的交角与二面角互补成180°。

设a、b、c是从同一点S发出的三条不在同一平面内的射线(如图181)，射线a、b、c夹成三个角：(ab)、(ac)、

（bc），由这三个角组成的图形，称为**三面角**。点 S 称为三面角的**顶点**。射线 a、b、c 称为三面角的**棱**。相邻两棱所夹的角称为三面角的**平面角**。相邻两棱间的平面称为三面角的**面**。相邻的两个面和它们相交的棱所组成的角，称为三面角的二面角。如：过棱 a 和 b 的半平面与过棱 a 和 c 的半平面相交于棱 a，这两个半平面所组成的角，称为三面角 a 棱的二面角，或者称为三面角的平面角（bc）所对应的二面角。

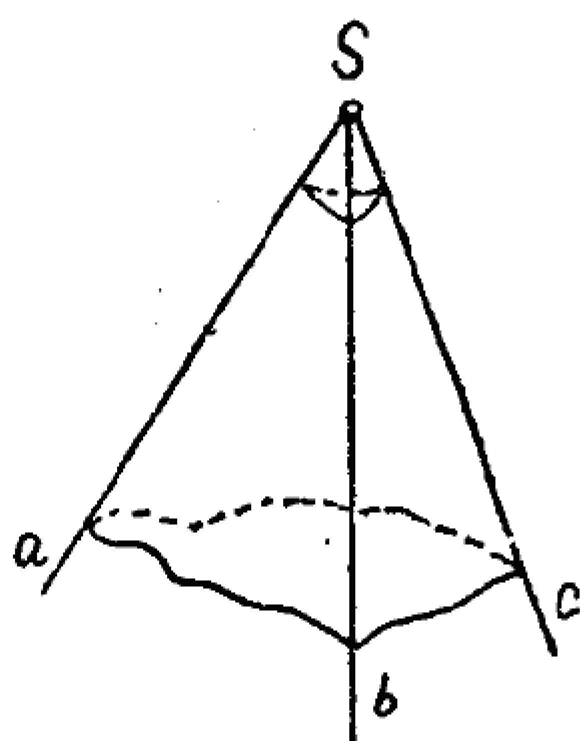


图 181

三面角的余弦定理

定理22.1 设 α、β、γ 是三面角的平面角，C 是平面角 γ 所对的二面角，则

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

证明 设 S 是三面角的顶点，a、b、c 是这个三面角的棱，α、β、γ 是由棱 b 和 c、c 和 a、a 和 b 分别组成的三面角的平面角，而 C 是这个三面角 c 棱的二面角，即三面角的平面角 γ 所对应的二面角（如图182）。在三面角 a 和 b 棱上，分别截取长度均为 1 的线段 SA 及 SB，应用

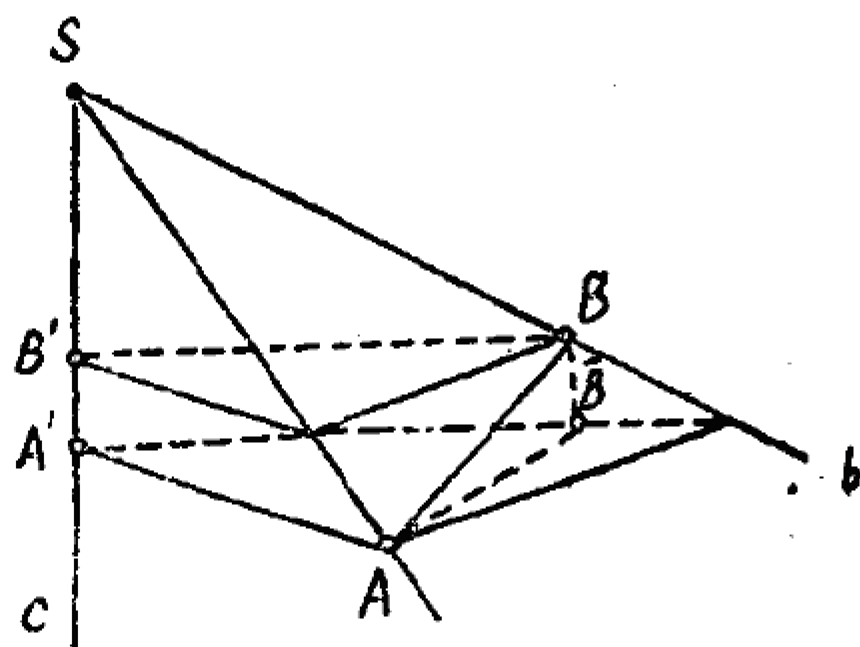


图 182

余弦定理于三角形 ASB，我们可以得出：

$$AB^2=1+1-2\cos\gamma.$$

现在我们用另一种方法求线段AB的长度。为此，过点A作垂直于棱 c 的平面交棱 c 于点A'，又过点B作垂直于棱 c 的平面交棱 c 于 B'。设点 $\bar{B}$ 是从点 B 向过点 A 平面引作垂线的垂足，应用余弦定理于三角形$AA'\bar{B}$，我们可以得到：

$$A\bar{B}^2=AA'^2+A'\bar{B}^2-2AA'\cdot A'\bar{B}\cos C.$$

但　　$AA'=\sin\beta$，　$A'\bar{B}=BB'=\sin\alpha$，所以

$$A\bar{B}^2=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos C.$$

应用勾股定理于直角三角形 $AB\bar{B}$，又可以得出：

$$AB^2=A\bar{B}^2+B\bar{B}^2.$$

而　　$B\bar{B}=|\cos\beta-\cos\alpha|$。所以

$$\begin{aligned}AB^2&=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+(\cos\beta-\cos\alpha)^2\\&\quad-2\sin\alpha\sin\beta\cos C\\&=2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos C.\end{aligned}$$

由上述线段AB^2的两个表达式，我们可以得出：

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

定理得证。

已知三面角的极三面角

设　a、b、c 是一个三面角的三条棱，S 是这个三面角的顶点，平面角（bc）所在的平面把空间分割成两个半空间，射线 a 位于其中一个半空间内，过顶点 S 向另一个半空间，引作与平面角（bc）所在平面垂直的射线a'。同法，作射线b'及c'分别垂直于平面角（ac）和平面角(ab)所在的平面，以 a'、b'、c' 为棱的三面角称为原三面角(abc)的**极三面角**(如图 183)，很容易看出，**原三面角的三条棱各垂直于极三面角的三个面**。两个三面角的极性是相互的，即如果三面

角$(a'b'c')$是三面角(abc)的极三面角，那么三面角(abc)也是三面角$(a'b'c')$的极三面角。我们知道，如果两个角的边互相垂直，那么这两个角或者相等，或者互补成180°。因此，根据这个定理读者很容易判断，极三面角的平面角和与它对应的原三面角的二面角互补成180°，即平面角$(b'c')$与棱a的二面角互补成180°等等。同样，极三面角的二面角和与它对应的原三面角的平面角互补成180°。如：棱a'的二面角与平面角(bc)互补成180°。

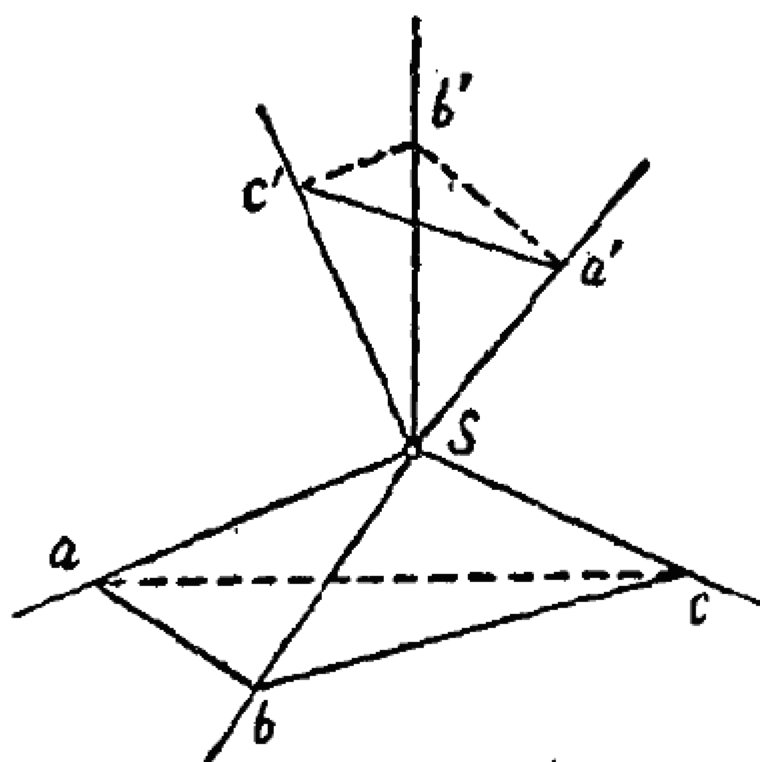


图 183

定理22.2　设 A、B、C 是三面角的三个二面角，而 γ 是二面角 C 所对的平面角，则

$$\cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B\cos\gamma .$$

应用定理 22.1 于已知三面角的极三面角，即可直接推出这个定理。

三面角的正弦定理

定理 22.3　设 α、β、γ 是三面角的三个平面角，而 A、B、C是它们所对的二面角．则

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

证明　在三面角的棱c上，截取线段SC，使其长等于1（如图184），从C点向角(ab)所在的平面作垂线。设$\bar{C}$为这条垂线的垂足，过C点作平面垂直于棱a或棱a的延

长线，并与棱 a 交于点 A，又过 C 点作平面垂直于棱 b 或棱 b 的延长线，并与棱 b 交于点 B。

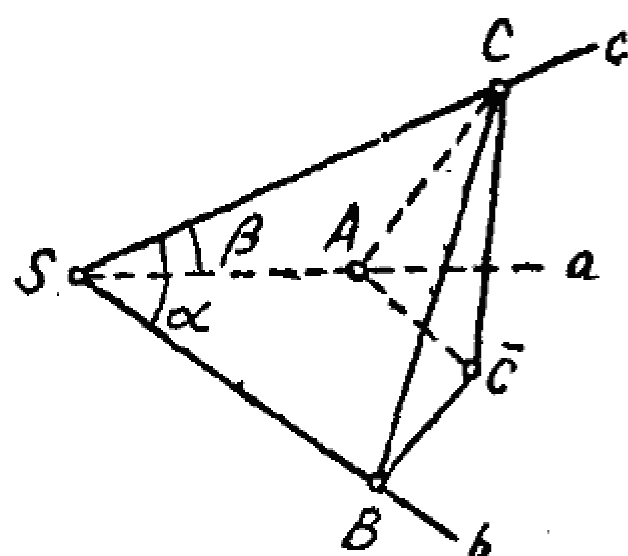


图 184

现在让我们计算垂线 $C\bar{C}$ 的长度。由直角三角形 SCB（角 B 是直角），可以得出，

$$CB=1\cdot\sin\alpha。$$

现在用直角三角形$CB\bar{C}$（角$\bar{C}$是直角）来求垂线$C\bar{C}$的长度。

$$C\bar{C}=CB\sin B=\sin\alpha\sin B。$$

垂线$C\bar{C}$的长度还可用其它方法来求，即利用直角三角形ACS和直角三角形$CA\bar{C}$，来计算垂线$C\bar{C}$的长度。此时，可以得出：

$$C\bar{C}=\sin\beta\sin A。$$

由上述垂线长$C\bar{C}$的两个表达式，可以得到：

$$\sin\alpha\sin B=\sin\beta\sin A。$$

由此可以得到

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}.$$

同理可得关系式：

$$\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

三面角的平面角的不等式

定理 22.4　三面角的任何一个平面角必小于其它两个平面角的和。

证明 设 α、β、γ是三面角的三个平面角．求证 $\gamma<\alpha+\beta$．应用定理22.1于这个三面角，可以得到：

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

因为 $\cos C>-1$，而$\sin\alpha$和$\sin\beta$取正值，所以可得到下列不等式：

$$\cos\gamma>\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

因为不等式的右端恰好是 $\cos(\alpha+\beta)$， 故

$$\cos\gamma>\cos(\alpha+\beta).$$

大家知道，当角度由0°增大到180°时，余弦值随之减小，故 $\gamma<\alpha+\beta$． 定理得证．

多面角 从一点S发出射线a_1，a_2，…，a_n，并且任何三条相邻的射线a_1、a_2、a_3；a_2、a_3、a_4；…；a_n、a_1、a_2都不在同一平面内，由平面角(a_1a_2)，(a_2a_3)，…，(a_na_1)所组成的图形叫**多面角**（如图185）．点S叫做**多面角的顶点**，而射线a_1，a_2，…，a_n叫做**多面角的棱**．如果多面角位于任意面角所在平面的同一侧，那么该多面角叫做**凸多面角**．

定理 22.5 凸多面角的所有平面角的和小于 360°．

证明 设a_1，a_2，…，a_n是凸多面角的棱，而S是凸多面角的顶点．在棱a_1和a_2上分别取点A_1和A_2，现在棱a_3上取点A_3使它接近顶点S，并过三点A_1、A_2、A_3作平面α（图185）．由于点A_3十分接近顶点S，所以平面α与所有的棱a_1，a_2，…，a_n都相交．设A_1，A_2，A_3，…，A_n是平面α和顶角S的所有棱的交点，由多面角S的凸性可推出以A_1，A_2，…，An为顶点的多边形P的凸性（如图186）．

现在研究多面角S和以A_1，A_2，…，A_n为顶点的所有

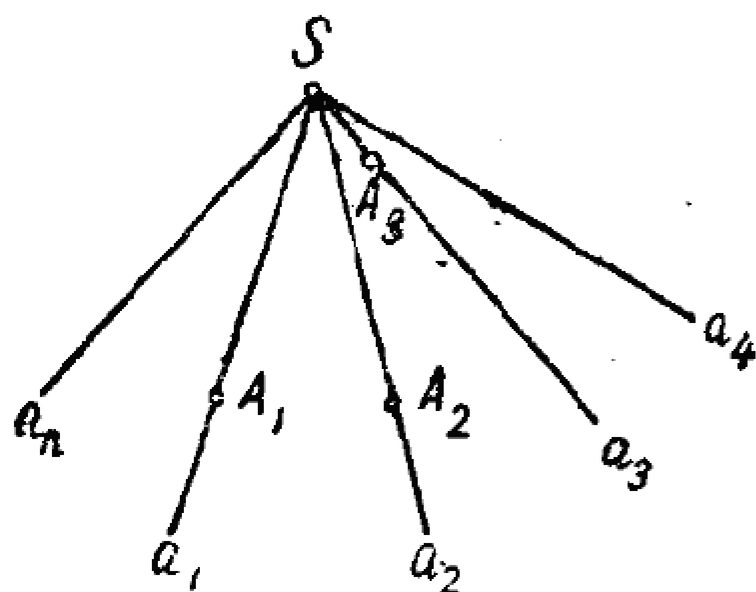


图 185

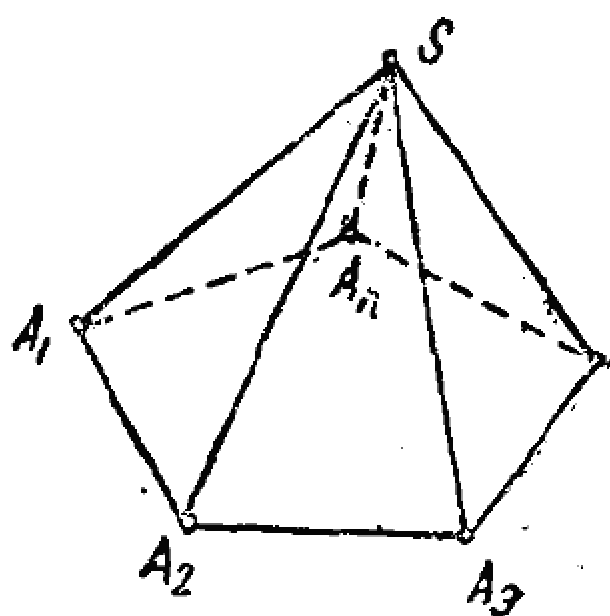


图 186

三面角．它们的所有平面角之和等于多边形P的内角和（即$180°n-360°$）加上三角形A_1A_2S，A_2A_3S，…，$A_nA_1A_2$的所有内角和（即$180°n$），因此，所有平面角之和等于$2\cdot180°n-360°$．

在每个三面角A_k中，属于多边形P的角小于另外两个平面角之和．因此，上面所求得的所有平面角之和大于$(180°n-360°)2+\theta$，其中θ是顶点为S的所有平面角之和，即

$$(180°n-360°)2+\theta<2\cdot180°n-360°.$$

由此可以得出　　$\theta<360°$．　定理得证．

习　题

1．a、b、c是三条不在同一平面内的直线，它们相交于O点，点O把各条直线分割成两条射线，以每条射线为一棱，可以作出八个三面角．试将这八个三面角的平面角和二面角用其中一个三面角的平面角和二面角来表示．

2．设　α、β、γ是三面角的三个平面角，而A、B、C是三个平面角所对的二面角．设ϕ是二面角C的棱与平面角

γ 的平面所成的角，证明：

$$\sin\phi=\sin\beta\sin A=\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

3．已知一个三面角的二个平面角均等于 α，而这两个平面角所成的二面角等于ϕ，试求其余的角。

4．三面角中有一个二面角是直角，夹这个直角二面角的平面角是 α 和β，试求其余的角。

5．在一个三面角中，已知一个平面角和这个平面角所在的两个二面角，并且这两个二面角中有一个是直角，试求其余的角。

§23．空间的运动和其它变换

运动及其性质 空间运动的概念，和平面运动的概念相同。我们把空间的运动，理解为空间自身的相互单值映射，并且经过变换，点与点之间的距离仍保持不变。这就是说，如果X和Y是空间的任意两点，而且X'和Y'是它们的对应点，那么$XY=X'Y'$。空间运动具有平面运动的类似性质。特别是，**经过运动直线仍为直线，直线上的点仍保持着原顺序**。这就是说，如果三点A、B、C在一直线上，并且B点位于A和C之间，那么变换后对应点A'、B'、C'仍在一直线上，并且B'位于A'和C'之间。证明空间这种运动的性质，与证明平面运动的方法完全相同。这里，就不再重复了。

经过空间运动平面仍为平面 现在我们来证明这条性质。设 α 是一个平面，而A、B、C是这个平面内不在同一条直线上的三个点。经过运动，这三点变为三点A'、B'、C'，它们仍不在同一条直线上。设α'是过点A'、B'、C'的平面，

求证：平面α'是平面α运动后的平面。

设X是平面α内的任意一点。在平面α内，过点X作一条直线，使这条直线与三角形ABC相交于两点P和Q。对应于P和Q的点P'和Q'应位于三角形$A'B'C'$的边上，因而必在平面α'内。直线PQ运动后，以$P'Q'$表示。点X在直线PQ上，运动后点X'在直线$P'Q'$上，即点X'和直线$P'Q'$都在平面α'内。因此，平面α内任意点X，运动后，在平面α'都有其对应点X'。

现在我们证明，平面α'内每一点X'必是平面α上某一点X的映象。为此，在平面α'内，过点X'作任意一条直线交三角形$A'B'C'$于P'和Q'。设点P和Q是点P'和Q'的对应点，直线PQ运动后变成直线$P'Q'$。因此，点X'必是直线PQ上某点X的映象，因而X'是平面α上某点X的映象。结论得证。

与平面几何相同，在立体几何中，也可用运动的方法来证明空间图形的全等性质。如果经过运动图形F与图形F'吻合，即图形F变成图形F'，那么图形F和图形F'称为**全等的**两个空间图形。

关于平面和关于点的对称　与平面几何中关于直线对称相同，在立体几何中，建立关于平面的对称概念。设α是任意一个平面，X是空间任意一点。过点X作直线a垂直于平面α，此直线a与平面α相交于某一点A。现在按下面的规则取点X'：如果点X在平面α内，则取点X'与X点重合。如果点X不在平面α内，则点X'，对平面α而言，位于另一半空间内，并且AX等于AX'（如图187）。点X'称为点X关于平面α的**对称点**。在空间自身映射时，如果点X与关于平面α的对称点X'相对应，那么这种映射称为关于平面α的**对称**

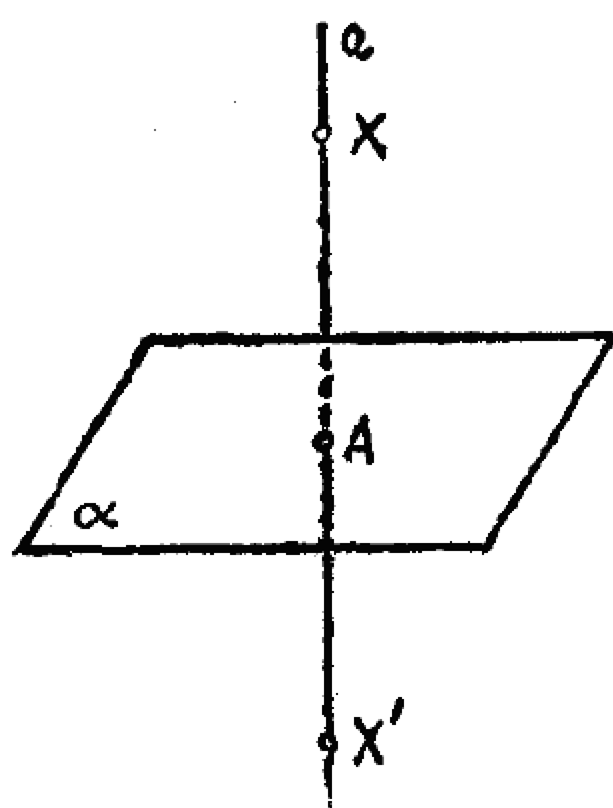


图 187

变换或**反射映象**.

与平面几何中关于直线反射映象一样，在立体几何中，**关于平面的反射映象，也是一种运动**. 为了证明这个结论，必须指出：空间垂直于平面 α 的平面 β 关于平面 α 的反射映象，是关于平面 α 与 β 所交直线的反射映象. 现在让我们来证明这个结论.

设 P和Q是空间任意两点.过直线PQ作平面β垂直于平面 α，并交平面 α 于某直线 b .如果P'和Q'是P和Q关于平面 α 的对称点，那么P'和Q'也必是P和Q关于直线 b 的对称点. 事实上，经过 P 点垂直于平面 α 的直线和经过Q点垂直于平面 α 的直线均位于平面 β 内，并均垂直于直线 b .因为平面内关于直线的对称变换保持点与点间的距离(即$PQ=P'Q'$)，在空间关于平面的对称变换也具有这个性质，因此，关于平面的对称变换是一个运动. 通过平面上关于点的对称变换可以建立起空间关于已知点的对称变换定义. 与平面上一样，空间关于点的对称变换也是一种运动. 为了证明这个结论，只要指出：空间关于已知点O在过O点的每个平面 α 内的对称变换就是在平面 α 内关于O点的对称变换.

借助于关于平面与关于点的对称概念，可以建立起空间图形的对称面和对称中心的概念，对称面和对称中心与平面几何中的对称轴和对称中心的定义相同.

空间的平移和转动 空间平移的定义与平面内平移的定

义相同，平移指的是诸点沿平行线移动同一距离。

和在平面上一样，连续两次关于点O_1和O_2的对称变换就得到一个平移，点沿平行于直线O_1O_2的直线移动的距离等于线段O_1O_2长的二倍。

和在平面上一样，空间平移可完全由给定的两个对应点来确定。

空间平移性质的证法和平面上平移相应性质的证法完全一样。因此，我们就不再论证。

绕直线a转一角α的**转动**指的是这样的运动：运动时，直线a保持不动，而由a所在的半平面均转一角α，即每个这样的半平面与对应的半平面组成一个以a为棱并等于α的二面角。直线a叫**转轴**，角α叫**转角**。

连续二次关于两相交平面α和β的反射映象就得出一个绕直线C的转动，而C是平面α和β的交线。

为了证明这个性质，作平面γ垂直于直线c，在平面γ内，对称变换就是指关于平面γ与平面α和β所交两条直线的两个反射映象，而我们知道，这样连续二次反射映象就得出一个绕平面γ与直线c的交点的转动。

空间的相似变换和同位相似变换 空间的相似变换及最简单相似变换——位似形的定义均与平面的有关定义完全相同。空间相似变换把直线变成直线，把平面变成平面，并保存直线与直线的夹角，平面与平面的夹角，直线与平面的夹角。

图形F经过相似变换所变成的图形F'叫做F的**相似形**。三角形的相似形是相似于这三角形的图形。相似图形中各个相应点之间的距离之比是个常数，这个常数叫相似系数。相似图形的面积之比等于相似系数的平方，这后一结论对三角

形来说显然成立，因而对于能分割成三角形的任意图形均成立。

平面到平面的投影 前面我们已阐述过关于空间各种变换的性质。现在我们来研究**投影**。投影是一个平面到另一个平面的一种重要变换。已知：α和β是两个任意平面，而h是一条与平面α和β相交的直线(如图188)。设X是平面α内的任意一点，过X作直线平行于直线h，所作直线交平面β于某点X'。平面α内每一点X，在平面β内都有其对应点X'，我们把这种映象叫做平面α到平面β的**平行投影**。很明显，平行投影是单值的映象。如果投影直线垂直于平面β，那么这种投影就称为**正交投影**（或简称为正投影）。

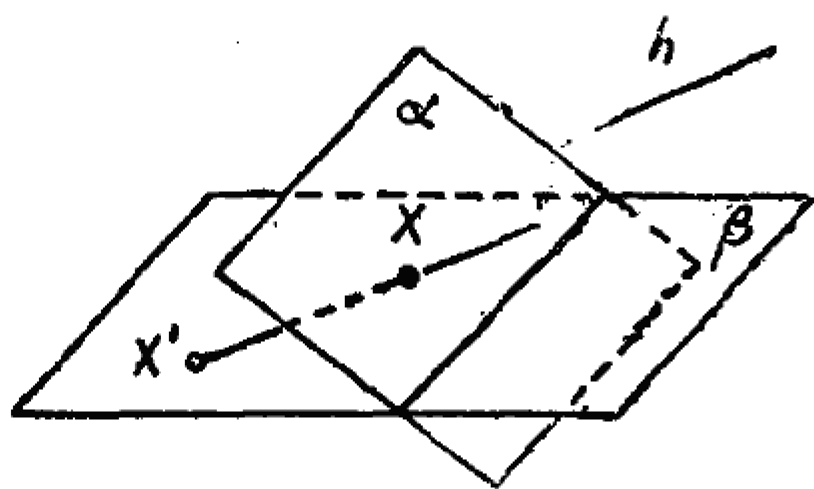


图 188

由平面α向平面β作平行投影，直线仍为直线，并保持点在直线上的次序。平行的直线仍为平行的直线，相交的直线仍为相交的直线，并保持一条直线上或平行直线上线段间的比值。

这些性质的证明很简单，留给读者自己证明。

设 F是平面α内的一个图形，并设点X描出图形F，经过平行投影，X的对应点X'将在平面β上描出图形F'。图形F'叫做图形F的**投影**。

定理23.1 图形F的正交投影为图形F′，图形F和F′的面积关系式为

$$S'=S\cos\phi,$$

式中ϕ为图形F和F′所在平面的夹角。

证明 我们把图形F，限定为可分割成数个三角形的图形。很明显，在这种情况下，只证明其中一个三角形具有定理所指的性质，便可得出结论是正确的。因此，现在我们设F是一个三角形，以α表示F所在的平面，而以β表示F的正投影所在的平面，如果平面α平行于平面β，那么定理的结论是非常明显的，图形F'等于图形F，因为图形F'是F沿垂直于平面的方向平移的正投影。

如果平面α不平行于β，并交β于某直线c。现在不妨假设三角形F的一条边平行于直线c。因为我们可以用分割的方法，把三角形分割成两个三角形，所以当平面β平移到与β平行的平面β'时，我们可以进一步设三角形F的一条边重合于直线c。

总之，只要论证三角形的底边位于平面α和β的交线c上，定理就可以得到充分的证明(如图189)。在这种情况下，三角形F和F'有一条公共边在直线c上，而它们的对应高为AB和$A'B$，高的关系式为$A'B=AB\cos\phi$，因而，三角形面积的关系式为$S'=S\cos\phi$。定理得证。

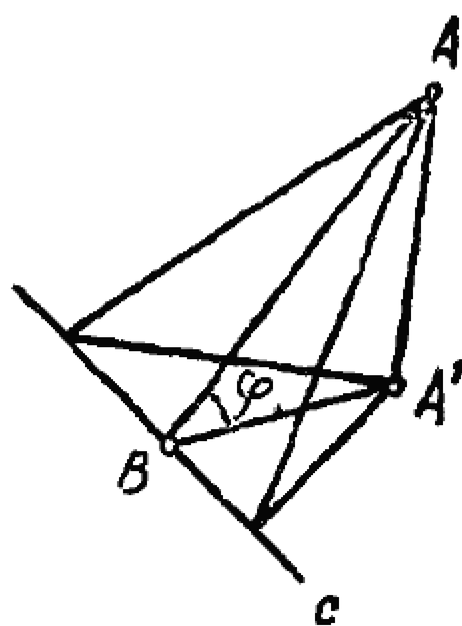


图 189

习 题

1 已知A是一个点，a是过点A的一条直线，而α是过直线a的一个平面。点A把直线a分割成为两条射线，用a'表示其中的一条射线。直线a把平面α分割成为两个半平面，而α'表示其中的一个半平面。平面α把空间分

割成为两个半空间，用E'_α表示其中一个半空间。按相同的条件，作一点B、射线b'、半平面[illegible]和半空间E'_B。

试证：经过运动，点A变换为点B，射线a'变换为射线b'，半平面α'变换为β'，半空间E'_α变换为半空间E'_β。

2．证明：接连作二次关于点O_1和O_2的对称变换，所得变换是沿直线O_1O_2方向的平移，平移的距离等于$2O_1O_2$。

3．试证：接连作二次关于两个平行平面反射映象是沿垂直于这两个平面的方向平移，平移距离等于这两个平行平面间距离的二倍。

4．如果一个三面角的三个平面角等于另一个三面角的三个平面角。或一个三面角的三个二面角等于另一个三面角的三个二面角，求证这两个三面角全等。

5．证明：任意一个三角形都可得到一个正三角形的正交投影。

§24．多　面　体

几何体　设　G是一个平面图形，设X是图形G上的一个点，如果平面上所有充分接近点X的点都位于图形G内，那么点X称为图形G的**内点**。这就是说，有这样一个正数ε，使平面内与点X的距离小于ε的所有点均位于图形G内，则点X称为图形G的内点，如果图形G的每个点都是它的内点，并且其中任意两点所连结折线又都在图形内，那么这样的图形G叫做**区域**。例如，不包括圆周在内的圆就是一个区域。

设　G是平面上的一个区域。如果平面内那些充分接近

于X的点中，有的属于图形G，有的不属于图形G，那么点X叫做区域G的界点。这就是说，不管怎样的数$\varepsilon>0$，在与点X相距小于ε的那些点中，有的属于图形G，有的不属于图形G，那么点X叫做区域G的界点。所有这些界点组成区域G的**边界**。上面所举的圆周就是由圆域的界点组成。圆周是圆域的边界。如果把区域G的界点都归附到区域G，我们便得到一个新的图形G。它叫做**闭区域**。

在平面几何中，我们对凸多边形的内点已下过定义。一个凸多边形的所有内点组成一个区域，如果把多边形本身归附到这个区域，我们便得到一个闭区域，我们称它为闭多边域。本节和§25中“多边形”一词就是指闭多边域。

同确立平面图形的概念一样；我们确立空间图形的内点、空间区域和空间区域的边界的概念。我们便不再重复这些定义。闭空间区域叫做**几何体**。由几个多边形围成的封闭几何体叫做**多面体**。围成多面体的各个多边形叫做**多面体的面**。如果多面体对它的任意一面而言，都在该面的同一侧面，则这种多面体叫做**凸多面体**。我们在本节中，将研究最简单的凸多面体，如：棱柱和棱锥。

棱柱 设α和α'是两个平行的平面，而h是一条与这两个平面相交的直线，P是在平面α内的一个凸多边形，其顶点为A_1，A_2，…，A_n。过多边形P内每一个点X，作直线h的平行线，它与平面α'的交点用X'表示（如图190）。所有线段XX'组成一个多面体，这个多面体叫做**棱柱**。棱柱的边界由多

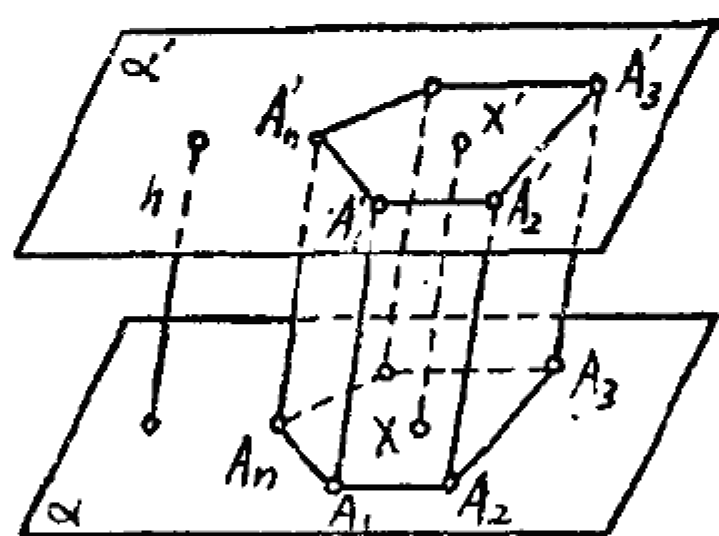


图 190

边形 P、与之全等的多边形 P'（在平面 α' 上）以及平行四边形 $A_1A_2A_2'A_1'$、$A_2A_3A_3'A_2'$、…，$A_nA_1A_1'A_n'$ 所组成。多边形 P 和 P' 叫做多面体的**底面**，而这些平行四边形叫做**棱柱的侧面**。线段 A_1A_1'，A_2A_2'，…，A_nA_n' 叫做**棱柱的侧棱**。如果侧棱都垂直于两个底面，则棱柱叫做**直棱柱**。侧棱和底面斜交的棱柱叫做**斜棱柱**。

棱柱的侧面面积的和叫做**棱柱的侧表面**（确切叫做**棱柱的侧表面积**）。**棱柱的全表面积**由棱柱的侧表面积和两个底面积组成。

定理24.1　直棱柱的侧表面积等于它的高，即侧棱长与底面的周长的乘积。

证明　直棱柱的各个侧面都是矩形。各个矩形的底恰好是棱柱底面多边形的边，而各个矩形的高等于侧棱长。因此，直棱柱的侧表面积等于

$$S=a_1l+a_2l+\cdots+a_nl=pl.$$

公式中 p 为棱柱底面的周长，而 l 为侧棱长。定理得证。

平行六面体　底面是平行四边形的棱柱称为**平行六面体**（如图191）。平行六面体的所有侧面都是平行四边形。连结不在同一侧面内两个顶点的线段叫做平行六面体的**对角线**。平行六面体有四条对角线，A_1A_3'、A_2A_4'、A_3A_1' 和 A_4A_2'。

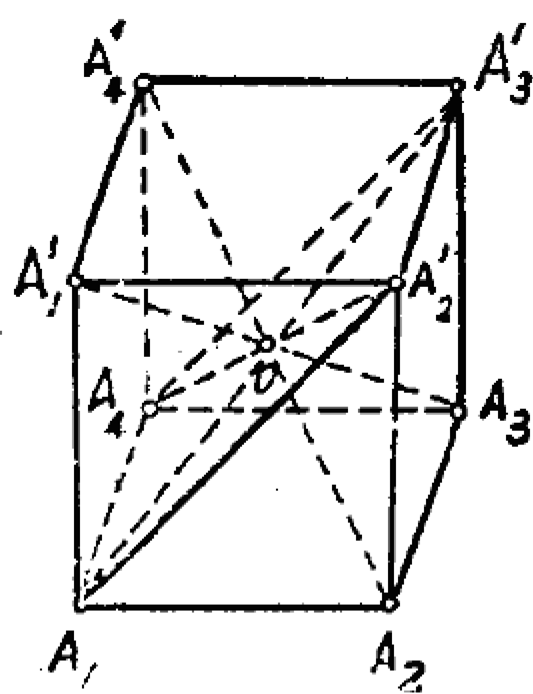


图　191

定理24.2　平行六面体的四条对角线相交于一点，并且互相平分。

证明 首先分析平行六面体中二条对角线，例如$A_1A'_3$和$A_4A'_2$（如图192）。因为四边形$A_1A_2A_3A_4$和$A_2A'_2A'_3A_3$是平行四边形，所以四边形$A_4A_1A'_2A'_3$也是一个平行四边形。平行六面体的对角线$A_1A'_3$和$A_4A'_2$也是平行四边形$A_4A_1A'_2A'_3$的对角线，因而这两条对角线相交于一点O，并且互相平分。同理可证，对角线$A_1A'_3$和$A_2A'_4$与对角线$A_1A'_3$和$A_3A'_1$相交于一点，并且互相平分，因此可得出结论，四条对角线相交于一点，并且互相平分。定理得证。

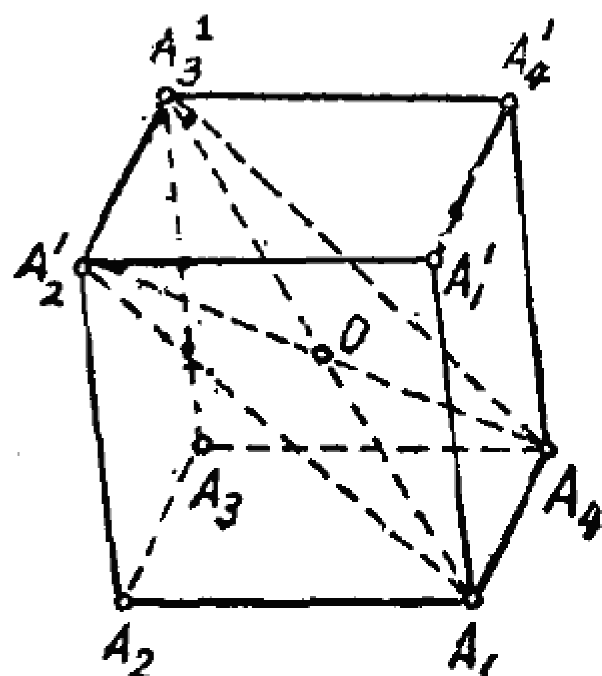


图 192

平行六面体的没有公共顶点的侧面叫做**相对的侧面**。

定理24.3 平行六面体的相对的侧面互相平行，并且相等。

证明 首先分析平行六面体中某两个相对侧面。例如：$A_1A_2A'_2A'_1$和$A_3A_4A'_4A'_3$（如图191）。因为，平行六面体中各个侧面都是平行四边形，所以，直线A_1A_2平行于直线A_3A_4，直线$A_1A'_1$平行于直线$A_4A'_4$。根据定理19.1和19.4，可以得到，我们所分析的两个平面，即$A_1A_2A'_2A'_1$和$A_3A_4A'_4A'_3$互相平行。因为，平行六面体的侧面都是平行四边形，可知四线段A_1A_4、$A'_1A'_4$、A_2A_3和$A'_2A'_3$互相平行且相等。因此，可以得出结论，侧面$A_1A_2A'_2A'_1$沿着A_1A_4棱平移，与侧面$A_4A_3A'_3A'_4$完全重合。所以，这两个相对的侧面互相平行，并且全等。同理可证，平行六面体的任意两个相对的侧面互相平行，并且全等。定理得证。

如果直平行六面体的两个底面是矩形，那么这种直平行六面体叫做**长方体**。长方体的所有侧面和底面都是矩形。

长方体中不平行棱的长度叫做长方体的**线性尺寸**。长方体有三个线性尺寸，即：长、宽和高。

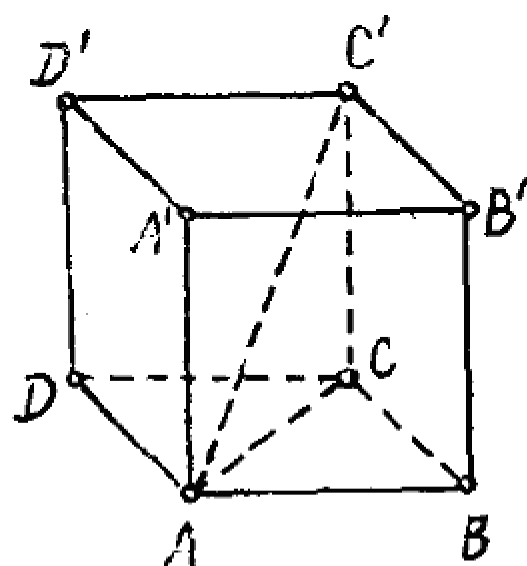


图 193

定理24.4 长方体的任意一条对角线的平方，等于它的三个线性尺寸的平方和。

证明 （参照图193）应用勾股定理于直角三角形$AC'C$，可得出：

$$AC'^2=AC^2+CC'^2.$$

应用勾股定理于直角三角形ACB，又可得出：

$$AC^2=AB^2+BC^2,$$

由此可得·

$$AC'^2=CC'^2+AB^2+AC^2.$$

三棱AB、BC、CC'互不平行，因而它们的长度是长方体的三个线性尺寸。定理得证。

棱锥 设 P是平面α内的一个凸多边形，而S是不在平面α内的一个点。把多边形P内的所有点X与点S连结成线段XS，所有线段XS组成一个多面体。这个多面体叫做**棱锥**（如图194）。如果P是一个n边形，那么棱锥称为**n 棱锥**。三棱锥也叫**四面体**。多边形P称为**棱锥的**

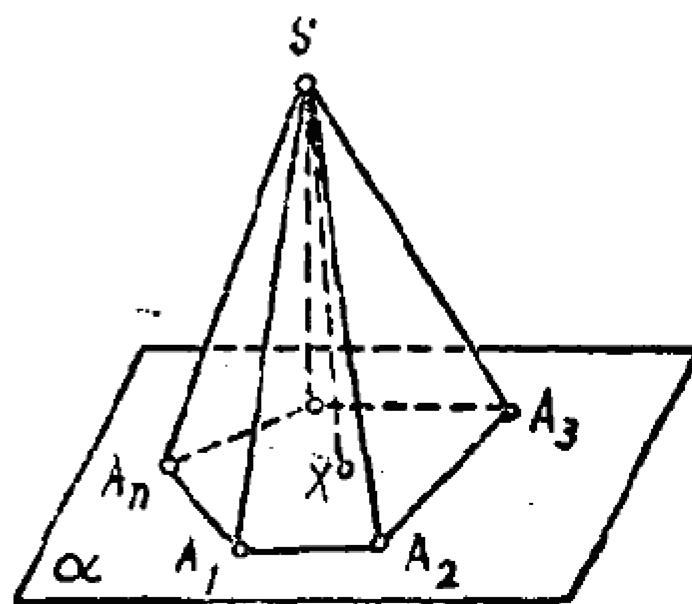


图 194

底面，而点S称为**棱锥的顶点**。由棱锥顶点S向棱锥底面所在的平面α引作的垂线称为**棱锥的高**。设A_1A_2，…，A_n是棱锥底面多边形P的顶点，三角形A_1SA_2，A_2SA_3，…，A_nSA_1是**棱锥的侧面**，而线段A_1S，A_2S，…，A_nS是**棱锥的侧棱**。

定理24.5 如果一个棱锥被平行于底面的一个平面所截，那么所截得的棱锥与已知棱锥相似。

证明 设S是棱锥的顶点，α是棱锥底面所在的平面，而α'是截面（如图195）。在棱锥的底面内，任取二个点X和Y。截面α'与线段XS和YS相交于点X'和Y'。直线XY与$X'Y'$互相平行，因为这两条直线位于同一平面SXY内，并且两直线不相交。根据平面几何中的已知定理，可得比$\frac{X'S}{XS}$与比$\frac{Y'S}{YS}$相等，即比$\frac{X'S}{XS}=k$ 不依赖所取的点X。由此可知，平面α'所截得的顶点为S的棱锥，同已知的棱锥是两个位似形，其位似系数为k。定理得证。

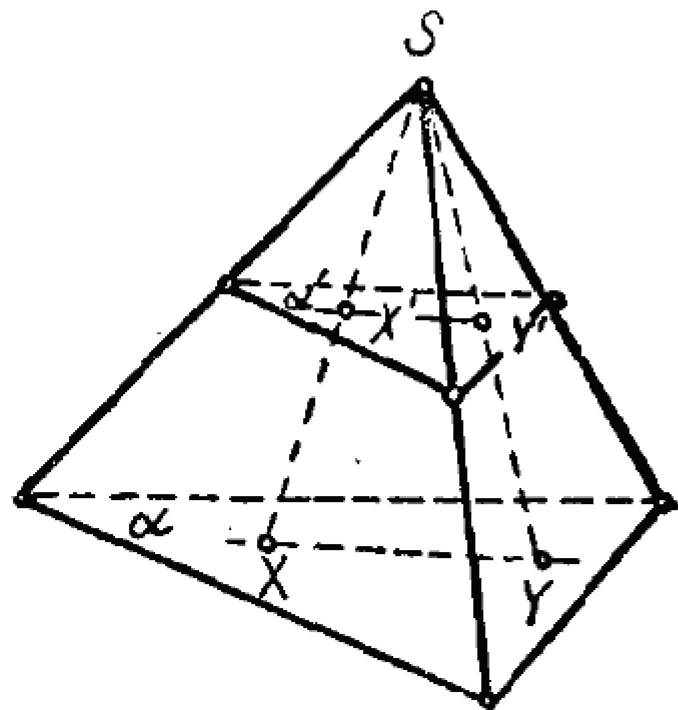


图 195

底面是一个正多边形，并且高经过底面中心的棱锥称为**正棱锥**。很明显，正棱锥的侧棱都相等，因而正棱锥的侧面是全等的等腰三角形。这些全等三角形底边上的高，称为**正棱锥的斜高**。正棱锥侧面的面积之和，称为**正棱锥的侧表面积**。

定理24.6 正棱锥的侧表面积，等于它的底面的周长

和斜高的乘积的一半。

证明 如果正棱锥的底面是一个 n 边形，其边长为 a，那么这个正棱锥的侧表面积为：$\frac{al}{2}n=\frac{an}{2}l=\frac{P}{2}l$。

式中 l 为正棱锥的斜高，而 P 为正棱锥底面的周长。

根据定理24.5，平行于棱锥底面 α 并与棱锥相交的平面 α' 所截得的棱锥与被截的棱锥是相似的棱锥。棱锥被截去一个相似的棱锥后的几何体，仍然是一个多面体，这种多面体称为**棱台**（如图196）。两个平行面称为棱台的底面，其余的各面叫**侧面**。根据定理24.5，可知棱台的两个底面是相似的多边形（又是同位相似多边形）。棱台的侧面是梯形。由正棱锥所截得的棱台称为**正棱台**。正棱台的两底面是相似的正多边形。正棱台的侧面是全等的等腰梯形。正棱台侧面梯形的高，就是**正棱台的斜高。**

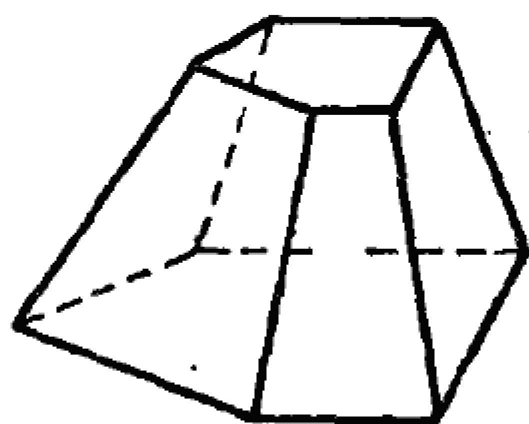


图 196

定理24.7 正棱台的侧表面积，等于它的两个底面周长的和与斜高乘积的一半。

这个定理的证明读者可自行完成（可引用定理24.6）。

正多面体 如果一个凸多面体的各面都是全等的正多边形，并且各顶点引出相同数目的棱，那么这种多面体称为**正多面体。**

正多面体的面，可能是正三角形、正方形和正五边形三种，只能有这三种。现在我们来研究正六边形可否组成正多面体。我们知道，任何一个凸多面角至少有三个面角，任何一个凸多面角的面角之和必应小于360°，每个面角必应小于

120°。正六边形的每个内角等于120°，三个120°的和等于360°，因此正六边形不可能组成一个三面角，即不可能组成正多面体。

如果正多面体的面是正三角形，那么正多面体各顶点所引出棱的数目应不大于五。如果棱数超过五，那么正多面体各顶点的面角之和就不小于360°，这不符合多面角关于面角的性质。因此，对于各面均为正三角形的正多面体来说，各顶点所引出棱的数目只能是三、四、五。而相应的正多面体也只能是正四面体、正八面体、正二十面体（如图197）。正四面体每个顶点可引出三条棱，正八面体每个顶点可引出四条棱，而正二十面体每个顶点则可引出五条棱。

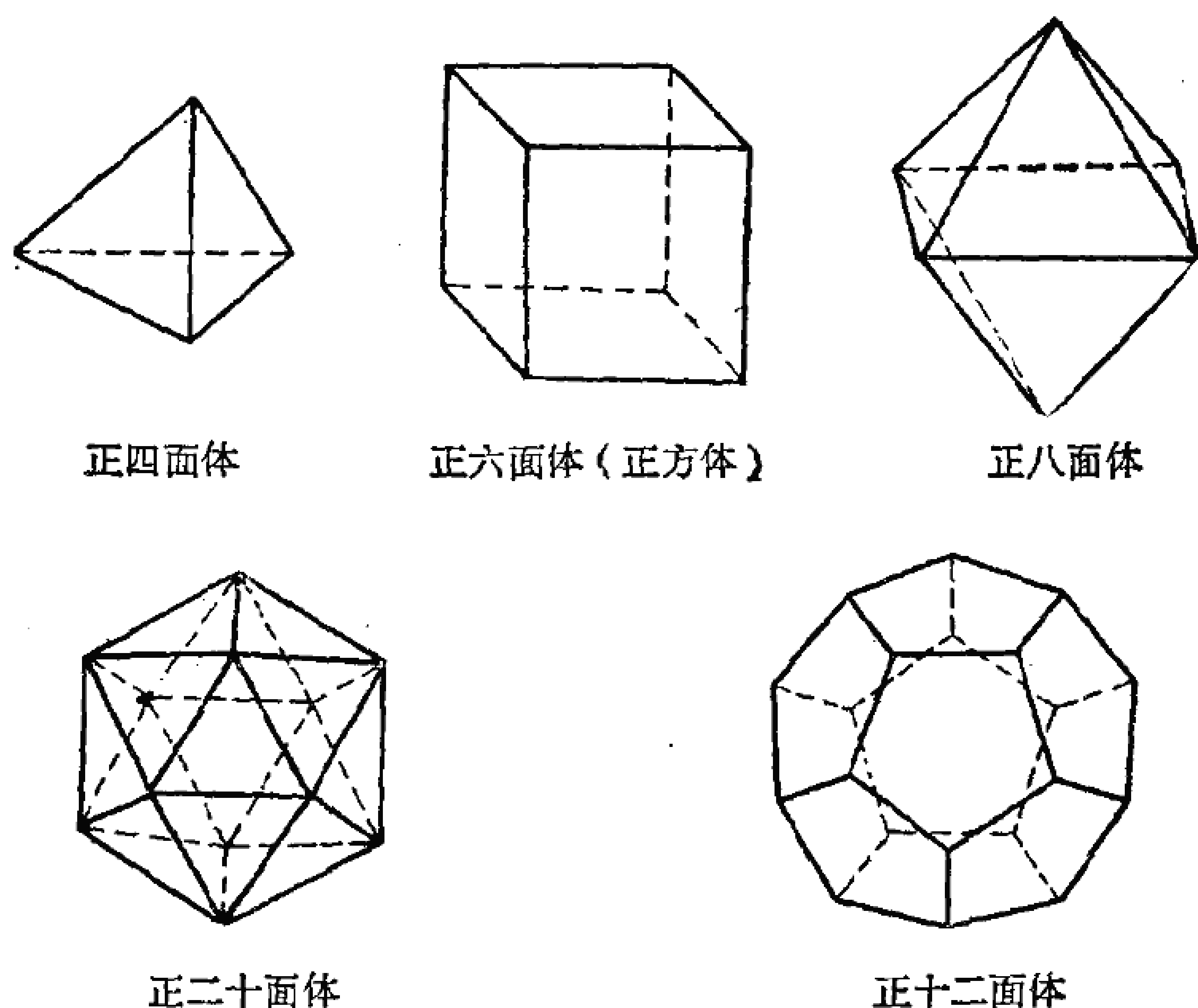


图 197

如果正多面体的面是正方形，那么这个正多面体每个顶

点只能引出三条棱，不能引出四条棱。相应的正多面体叫**正六面体**，或称为**正方体**（请看图197）。

如果正多面体的面是正五边形，那么每个顶点只能引出三条棱，相应的多面体是**正十二面体**（如图197）。

每个正多面体的所有二面角相等。正四面体、正六面体和正十二面体，过每个顶点引出三条棱，此时，证明它们的二面角各自相等，比较简单。事实上，三面角的二面角可以单值地由三面角的面角决定。正八面体和正二十面体，过每个顶点引出四条棱和五条棱，此时，要证明它们的三面角各自相等，是相当繁琐的，这里省略其证明。

习　题

1. 证明：正六面体各正方形面上的中心是正八面体的各顶点；而正十二面体各正五边形面上的中心是正二十面体的各顶点。
2. 已知一个正六面体，在双双平行的正方形面上，取异面对角线，试证明：每六条对角线组成一个正四面体。
3. 求正十二面体的二面角。
4. 证明：棱锥的侧表面积等于$\frac{S}{\cos\alpha}$，式中S为棱锥的底面积，而α是棱锥侧面与底面所夹成的二面角。
5. 设$ABCD$和$A_1B_1C_1D_1$是两个正四面体，如果它们的棱对应相等，即$AB=A_1B_1$，$AC=A_1C_1$等等，求证两正四面体全等。
6. 证明：如果四面体的异面棱相等，那么该四面体的所有面都全等。

§ 25. 投 影 图

点在投影图上的显示 用平行直线投影图形的方法，把空间图形绘制到平面上。通常向一个平面作投影，不能完全确定空间图形的形状。因而需要向两个、甚至向三个平面投影。现在我们来研究，如何借助于向二个平面正投影来绘制图形。

设 H和V是两个垂直相交于直线X的平面(如图198)。为了方便起见，把平面H称为**水平面**，而平面V称为**正面**。图形正交地投影到平面H和平面V上。图形在水平面上的投影叫**水平投影**，而图形在正面上的投影叫**正面投影**。平面H和V叫做**投影面**，而它们的交线X叫做**投影轴**。图形向平面H和V投影之后，然后水平面H绕轴X旋转90°角使与正面V吻合，这样两投影图便可绘制在同一平面内。用这种方法所得到的正面投影和水平投影在同一平面内的图称为**二视图**。现在我们研究任意一点在二视图上的位置。点的投影性质如下：

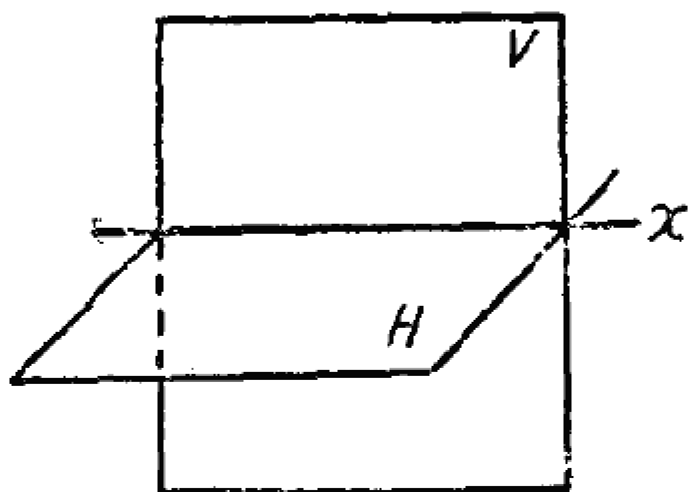


图 198

例题25.1 一点在二视图上的水平投影和正面投影是投影轴的一条垂线上的二个点。

证明 过已知点A作平面α垂直于投影轴X，平面α交平面H及V于直线a_1及a_2（如图199），点A的水平投影点A_1位于直线a_1上。同理，点A的正面投影点A_2位于直线a_2上。直线a_1和a_2均垂直于投影轴X。旋转与任何一种运动一样，

仍保持原角度。随着水平面H旋转90°与正面V吻合，直线a_1也旋转了90°并与a_2成一条直线。由此可知，点A在二视图上的投影A_1和A_2是在这条直线上的两个点。

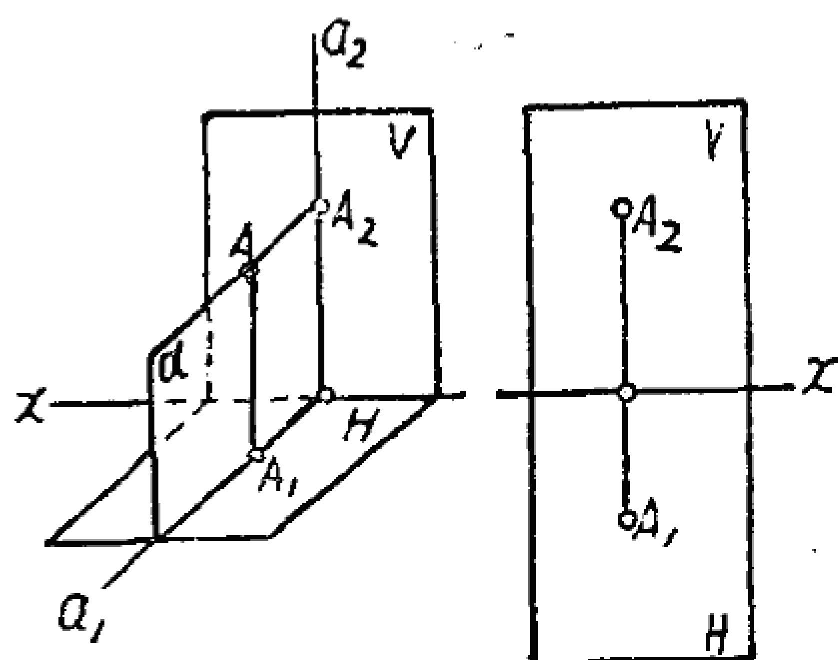


图 199

有关直线的例题

例题25.2 已知一条直线a在二视图上的投影，又知直线a上点A在水平面上的投影点，求点A的正面投影。

解 已知a_1和a_2为直线a的水平投影和正面投影，又知A_1是点A的水平投影点（如图200）。点A的正面投影位于过点A_1且垂直于投影轴的直线上，又位于直线a的正面投影直线a_2上，因此，过点A_1垂直于投影轴的直线与直线a_2的交点就是点A的正面投影点A_2。

例题25.3 已知一条直线a和直线a外的一点A在二视图上的投影，求作过点A且平行于直线a的直线的投影。

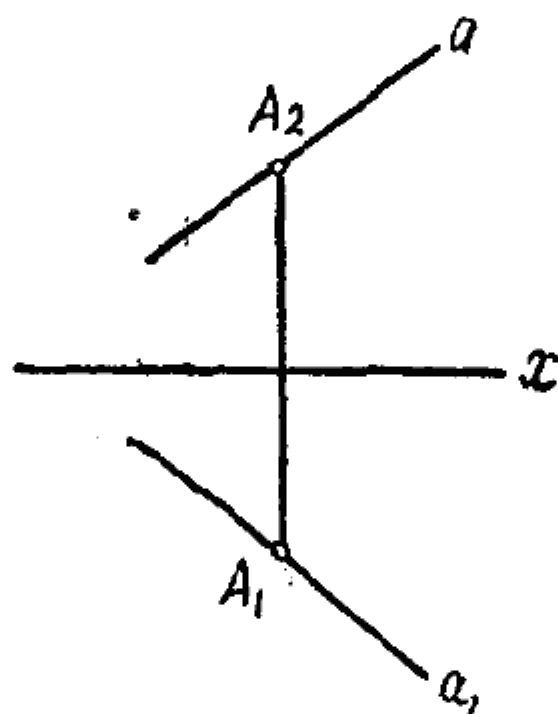


图 200

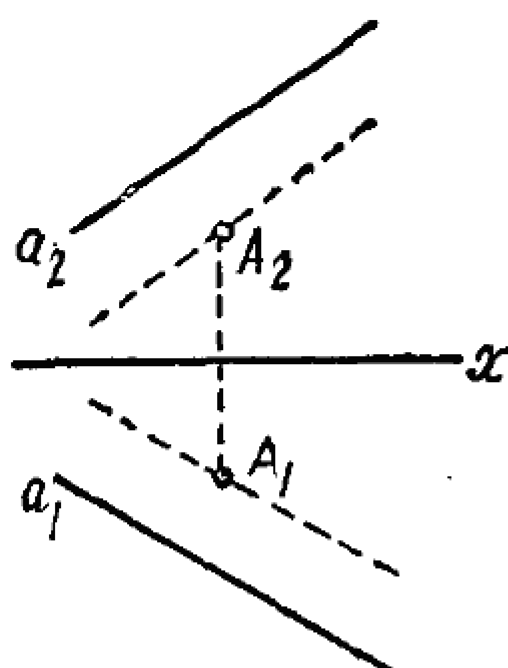


图 201

解 因为平行直线有平行的投影，所以过点A的投影点A_2和A_1，作直线a的投影直线a_2和a_1的平行线，便可得到所求直线的投影（如图201）。

线段长度的确定

例题25.4 已知线段AB在二视图上的投影，求线段AB的长度。

解 如果线段AB与一个投影面平行，如与正面平行，那么线段AB的长度就等于线段AB在正面投影的长度。根据线段AB在水平投影面上的投影平行于投影轴，我们可以断定，线段AB与正投影面平行。

假如线段AB不平行于任何一个投影面，我们以过端点A且垂直于水平面的直线为旋转轴，将线段AB绕这轴旋转，则A点为不动点，而端点B的两个投影都在变动：B点的水平投影是沿着以点A_1为圆心的圆周转动，而B点的正面投影是沿着平行于投影轴且过点B_2的直线b_2的移动（如图202）。

当线段AB旋转到平行于正面时，点B的投影B_1落在平行于投影轴且过点A_1的直线上。在这个位置上的点B_1用$\bar{B}_1$来表示，线段$A_1\bar{B}_1$就是线段AB转到平行于正面时的水平投影。不难求出AB转到平行于正面时的正面投影$A_2\bar{B}_2$.过点$\bar{B}_1$引的垂直于投影轴的直线与直线b_2的交点，就是旋转后线段AB的端点B在正投影面上的投影。正面上的投影线段$A_2\bar{B}_2$

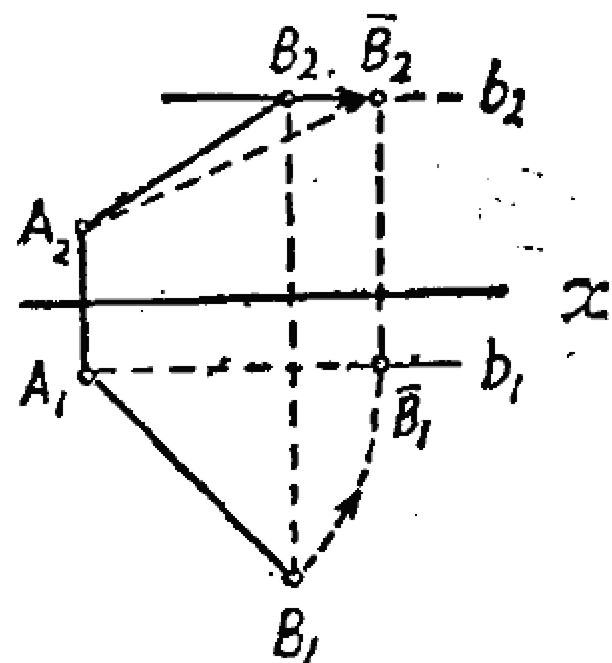


图 202

反映出线段AB的实长，即线段$A_2\bar{B}_2$的长度等于线段AB的长度。

有关直线和平面的例题 设H和V为投影面，而α是任意一个平面，平面α分别与平面H和V相交于直线h和v（如图203）。直线h和v叫做平面α在投影面上的**迹线**。即，h叫做**水平迹线**，而v叫做**正面迹线**。

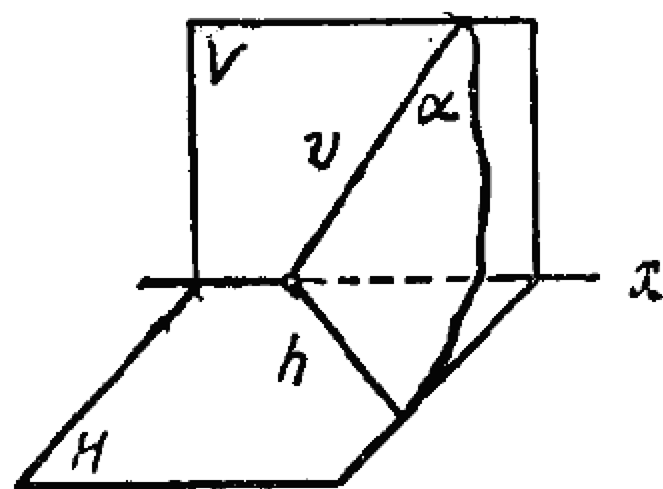


图 203

如果平面不平行于投影轴，那么平面的两条迹线交于投影轴；如果平面平行于投影轴，那么平面的两条迹线均平行于投影轴。如果平面平行于其中一个投影面，那么这平面只有一个迹线：平面平行于水平投影面，只在正投影面上有迹线；平面平行于正投影面，只在水平投影面上有迹线。在二视图上，平面以它的水平迹线和正面迹线表示。

例题25.5已知两个平面在二视图上的迹线，求作两个平面的交线，即求作交线的投影。

解 设α和β是两个已知平面，a_1和a_2是平面α的迹线，而b_1和b_2是平面β的迹线（如图204）。平面α和β的交线c交正投影面于某点P，点P的正面投影点P_2，就是平面α和β在正投影面上的迹线a_2及b_2的交点，而点P的水平投影点P_1位于投影轴上。

同理可证，直线c与水平投影面相交于某点Q。点Q的水平投影点Q_1，就是平面α和β在水平投影面上迹线a_1和b_1的交点，而点Q的正面投影点Q_2位于投影轴上。连接点Q_2

和P_2（正面投影）、点P_1和Q_1（水平投影），我们即可得到所求作的直线 c 的投影。

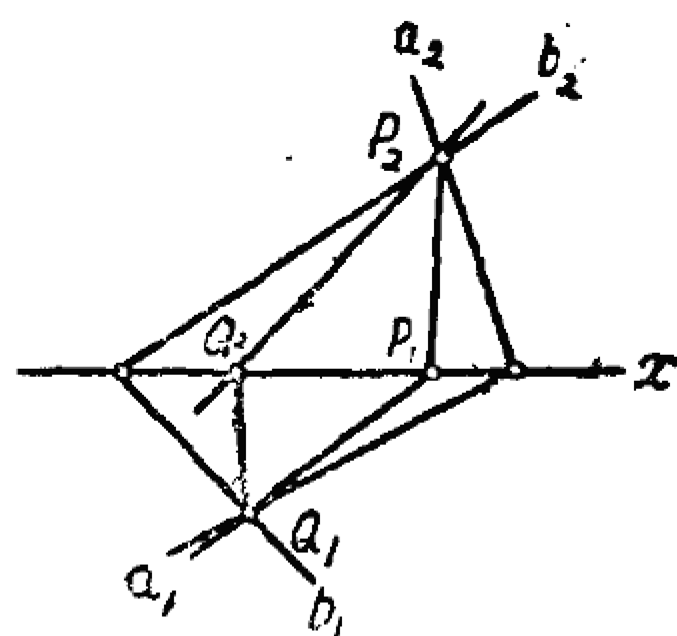


图 204

例题25.6 已知一条直线在二视图上的投影，求作过这条直线并垂直于一投影面（如水平面 H）的平面的迹线。

解 因为这个平面垂直于水平投影面H，所以它的水平迹线与已知直线的水平投影重合，而它的正面迹线垂直于投影轴。过已知直线的水平投影与投影轴的交点，引作投影轴的垂线，这条垂线就是这个平面的正面迹线（如图205）。

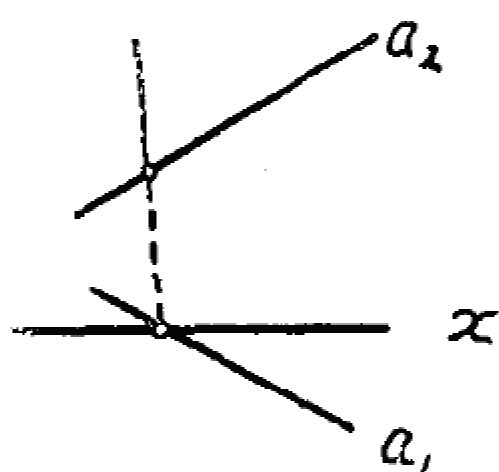


图 205

例题25.7 已知一条直线的投影及一个平面的迹线，求这条直线与这个平面的交点，即求交点的投影。

解 过已知直线作一个平面垂直于水平面H（例题25.6），求出这个平面和已知平面的交线 h（例题25.5）。同样，过已知直线作一个平面垂直于正面V，求出这个平面和已知平面的交线 v。直线 h 和 v 的投影交点就是所求的点的投影。

例题25.8 已知两条相交直线的投影及某一点的水平投影，如果这个点位于这两条直线所在的平面内，求这个点的正面投影。

解 过已知点的水平投影C_1，作一条与水平投影直线a_1和b_1相交的任意直线（如图206）。这条直线与直线a_1和b_1相交于点A_1和B_1。过点A_1和B_1，分别作投影轴的垂线，这两条垂线与已知直线的正面投影a_2和b_2的交点分别以A_2和B_2表示。

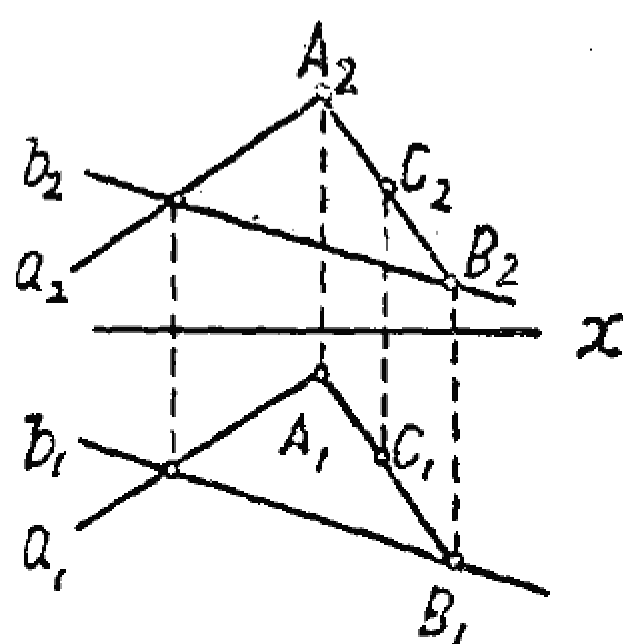


图 206

线段A_1B_1和A_2B_2是端点位于已知两条直线上的线段的水平投影和正面投影。由此可知，过点C_1引作的垂直于投影轴的直线与线段A_2B_2的交点C_2，就是我们所求点的正面投影。

习　　题

1. 已知两条直线在二视图上的投影，如何判断这两条直线相交或不相交？
2. 已知一平面在二视图上的迹线及一点在二视图上的投影，如何判断这个点位于这个平面内或不在这个平面内？
3. 已知两条相交直线在二视图上的投影，求作这两条直线所在平面的迹线。
4. 已知三角形在二视图上的投影，求作三角形。
5. 已知一个四边形的正面投影及这个四边形中三个顶点的水平投影，求作第四个顶点的水平投影。

§ 26. 简单体的体积

体积的概念　人们在生活和生产的实践活动中，经常遇到计算物体的体积问题，这类问题在古代就已出现。

现在以下面两个容器为例：一个是正方体形，而另一个是任意形状（如图207）。这两个容器均盛满溶液。已知第一个容器（即正方体）容m_{kg}溶液，而第二个容器容n_{kg}溶液，很自然认为第二个容器比第一个容器大$\frac{n}{m}$倍。如果以第一个容器为度量单位，那么我们可以认为，上述第二个容器比第一个容器所大的倍数就是第二个容器的**体积**。如此确立的体积概念具有如下三条性质：第一，把各个容器注满，必需一定量的溶液，因而，**每个容器都有固定的体积（正数值）**；第二，因为注满全等的容器需要等量的溶液，所以**全等的容器具有相等的体积**；第三，如果一个容器分为两部分，那么注满整个容器所需的溶液量等于两个部分容器所需溶液量之和。因而，**整个容器的体积等于各个组成部分的体积之和。**

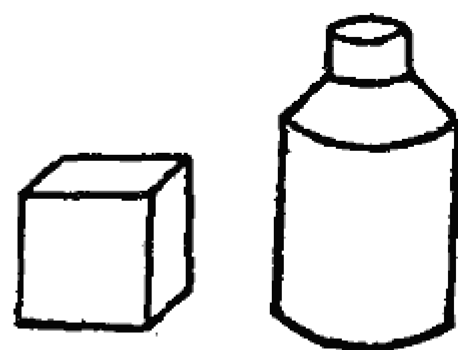


图　207

按上述办法确定容器的体积，必须往容器内注入溶液。但是，在生活中，我们恰恰需要解决相反的问题．即不往容器内注入溶液，而需要知道注满容器所需的溶液量。如果我们知道某容器的体积，那么容器的体积乘以单位体积所需的溶液量，我们便可求出注满容器所需的溶液量。如何才能知道容器的体积呢？现在我们证明：上面所指出的体积三条性

质就足以确定体积，并求出简单体的体积公式。

所谓简单体指的是这种多面体能分割成有限几个正四面体（即三棱锥）。特别是，象棱柱和棱锥，这样的凸多面体，都是简单体。

长方体的体积 首先，我们来确定长方体的体积。图208中的正方体是度量体积的单位，而另一个是需要度量体积的长方体。

从正方体的一个顶点出发，把正方体的每一条棱分成N个相等的线段，然后过这些点作直线垂直于棱并分割各平面。这样，正方体就被分割成N^3个小正方体。图中，正方体的每一条棱被分成五等分，小正方体的数目等于$25\times5=5^3$。

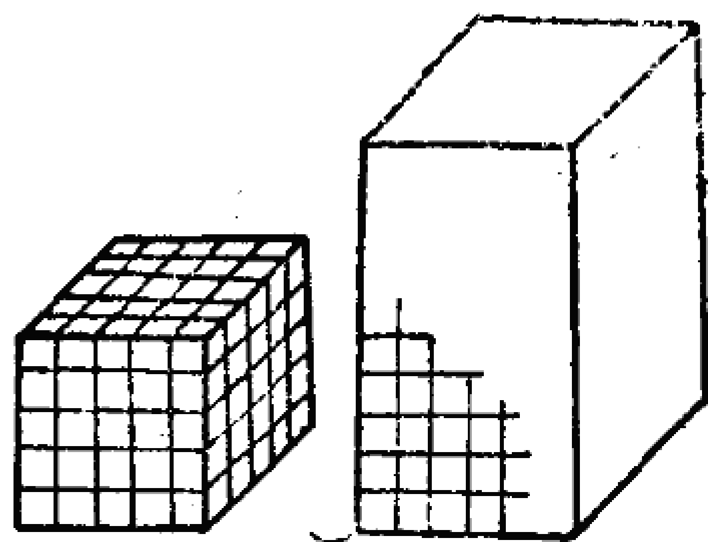


图 208

现在我们来确定小正方体的体积。根据体积的性质，可知大正方体的体积等于各个小正方体体积之和。因为，大正方体的体积等于1，并且小正方体的数目是N^3，所以小正方体的体积等于$\frac{1}{N^3}$，以g来表示小正方体的边长，则$g=\frac{1}{N}$，从而小正方体的体积为$\frac{1}{N^3}=g^3$。

现在我们在长方体的各棱上，从一个顶点起截取线段等于g，$2g$，$3g$，…，并过各线段的端点作平面垂直于长方体的各棱，这样，我们便得到一些边长为g的小正方体遍布于长方体。我们来求在长方体内所包含的小正方体的数目和包含长方体的小正方体的数目。

设 a、b、c 为长方体的三棱．用 l 表示 a 除以 g 的整数商，m 表示 b 除以 g 的整数商，n 表示 c 除以 g 的整数商．于是在长方体内所包含的小正方体的数目为 lmn，而包含长方体的小正方体的数目不大于 $(l+1)(m+1)(n+1)$．由此可见：长方体的体积介于 $lmng^3$ 及 $(l+1)(m+1)(n+1)g^3$ 之间，即

$$lmng^3 \leqslant V < (l+1)(m+1)(n+1)g^3$$

现在让我们证明乘积 abc 介于这两数之间，事实上，

$$lg \leqslant a < (l+1)g,$$

$$mg \leqslant b < (m+1)g,$$

$$ng \leqslant c < (n+1)g.$$

由此可得：

$$lmng^3 \leqslant abc < (l+1)(m+1)(n+1)g^3.$$

因为，V 和 abc 的值均介于 $lmng^3$ 及 $(l+1)(m+1)(n+1)g^3$ 之间，所以，V 及 abc 之差不大于 $(l+1)(m+1)(n+1)g^3 - lmng^3$，即不大于

$$lmg^3 + mng^3 + lng^3 + lg^3 + mg^3 + ng^3 + g^3,$$

因为，$lg \leqslant a$，$mg \leqslant b$，$ng \leqslant c$，故由此可见 V 及 abc 之差不大于

$$abg + bcg + acg + ag^2 + bg^2 + cg^2 + g^3,$$

如果 $g = \frac{1}{N}$ 充分小，那么这数能任意小。因此，数 V 及 abc 之差能任意小，而这只有当 $V = abc$ 时才能实现．

所以**线性尺寸为a、b、c的长方体的体积V＝abc**．这里 a、b、c 因所取单位体积立方体的棱长而有变化．

斜平行六面体的体积　现在我们来求斜平行六面体的体积(如图209—左)．过棱 BC 作垂直于底面 $ABCD$ 的平面，并

增附三棱柱$BB_1B_2CC_1C_2$于原给平行六面体，得一个新多面体。然后，过棱AD作垂直于底面$ABCD$的平面，并从所得多面体截去三棱柱$AA_1A_2DD_1D_2$。我们重新得到一个平行六面体，这个平行六面体的体积等于原平行六面体的体积。事实上增附的三棱柱可由截去的三棱柱平移AB距离而得，所以这两个三棱柱有相等的体积。经过上述平行六面体的变换，其底面积和高保持不变，两个侧面面积也保持不变，而另两个侧面变成垂直于底面。再应用一次这种变换就得到一个所有侧面都垂直于底面的平行六面体，即正平行六面体。再运用类似的变换于所得正平行六面体，即先增附三棱柱②，然后截去三棱柱①（如图209—右），我们得到一个长方体。这种变换也保持六面体的体积，底面积和高均不变。

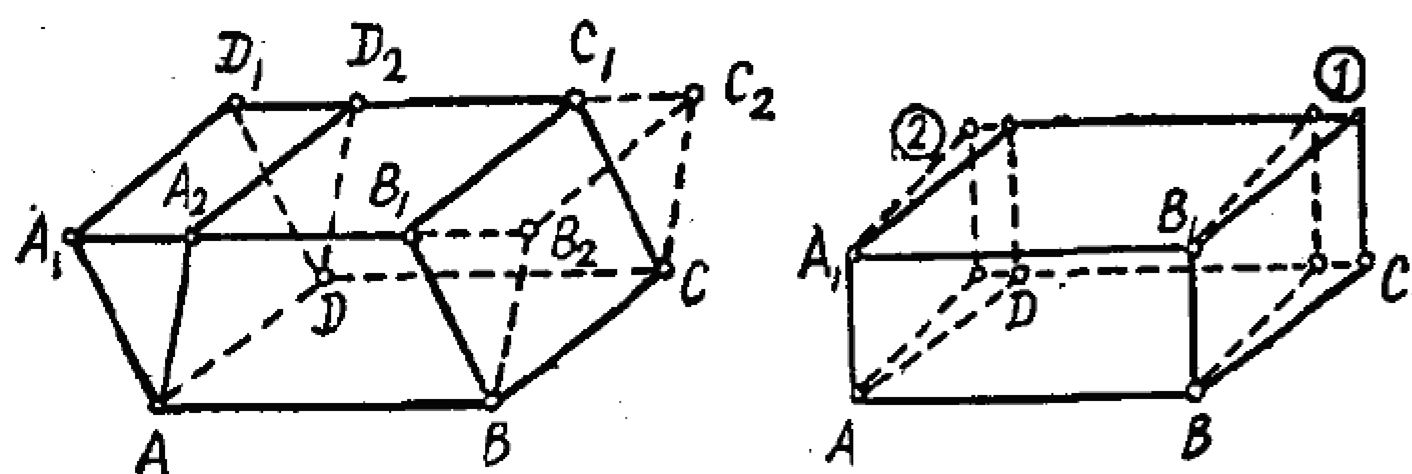


图 209

长方体的体积等于它的三个线性尺寸的乘积。两个线性尺寸之积是底面积，第三线性尺寸是高。因此，长方体的体积等于底面积与高的乘积。因为，在上述把所给平行六面体变换成长方体的每一个步骤中，体积、底面积和高均保持不变，所以原平行六面体的体积等于底面积与高的乘积。

总之，**任意平行六面体的体积等于底面积与高的乘积。**

棱柱的体积 求棱柱的体积。首先我们研究三棱柱（如

图210）。如图所示，把原三棱柱增附成一个平行六面体，点O是平行六面体的对称中心。因此，所增附的三棱柱与原三棱柱关于O点对称，这两个三棱柱的体积相等。由此可知，所作的平行六面体的体积等于原三棱柱体积的二倍。

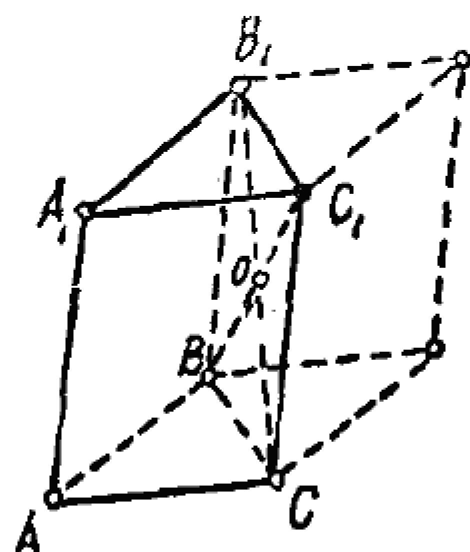


图 210

平行六面体的体积等于它的底面积与高的乘积，而三棱柱的底面积等于平行六面体底面积的$\frac{1}{2}$，而它们的高相等。由此可见，原三棱柱的体积等于它的底面积与高的乘积。

现在我们来研究任意棱柱的体积（如图211）。首先，将这个棱柱的底面分割成数个三角形。设△是其中一个三角形，过三角形△内任一点X作一条直线平行于侧棱。设a_x为这直线在棱柱内的线段，当点X描出三角形△时，所有线段a_x就组成一个三棱柱。当每一个三角形△都作成这种三棱柱后，我们就把已知棱柱分割成数个三棱柱。所有这些三棱柱的高都相等，即等于已知棱柱的高。

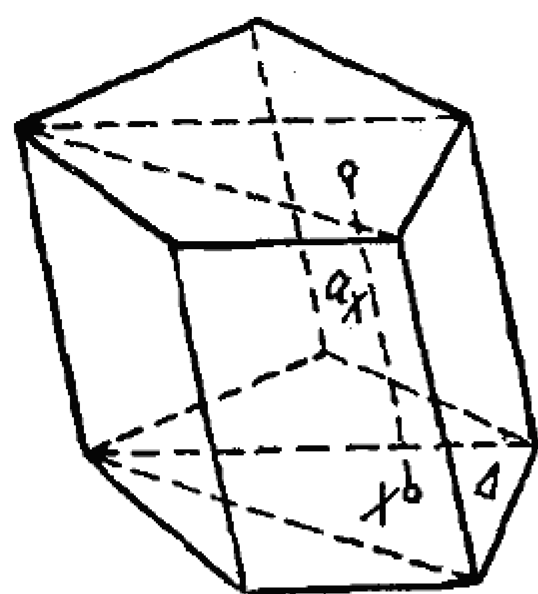


图 211

已知棱柱的体积等于各三棱柱体积之和。根据已证明的定理，三棱柱的体积等于它的底面积与高的乘积。由此可得：

$$
\begin{aligned}
V &= S_1 H + S_2 H + \cdots + S_n H \\
&= (S_1 + S_2 + \cdots + S_n) H.
\end{aligned}
$$

公式中V是棱柱的体积，S_1，S_2，…，S_n是分割棱柱底面所得诸三角形△的面积，而H是棱柱的高，也是三棱柱的高。所有三角形△的面积之和等于已知棱柱底面积S。因此

$$V=SH.$$

即，**任意一个棱柱的体积等于它的底面积与高的乘积。**

棱锥的体积 为了求一个三棱锥的体积，很自然，我们将试图向这三棱锥增附数个全等三棱锥，使之成为一个平行六面体，从而由平行六面体的体积，求得三棱锥的体积。很遗憾，在一般情况下这是办不到的。因此，我们必须用其它办法。

把三棱锥的高分成n等分，并且过各分点分别作平面平行于三棱锥的底面（如图212）。如此，三棱锥就被分成n层，每层内有两个三棱柱：使其中有一个三棱柱位于已知三棱锥体内；另一个三棱柱位于已知三棱锥体外（如图212所示）。

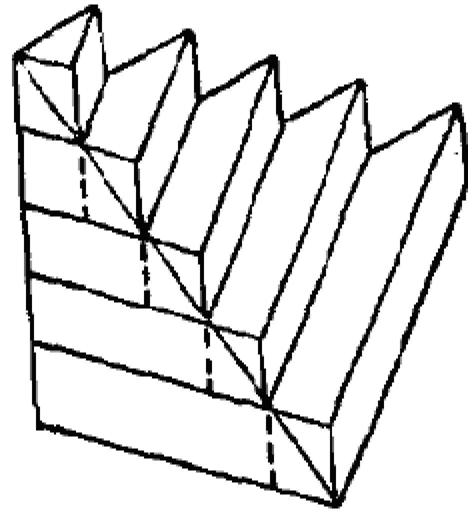


图 212

已知的三棱锥加锥体外所有三棱柱组成的多面体，以P_1表示，很明显P_1的体积大于已知三棱锥的体积。已知三棱锥减锥体内所有三棱柱组成的多面体，以P_2表示，因而P_2的体积小于已知三棱锥的体积。设V为已知三棱锥的体积，而V_1和V_2分别为多面体P_1和P_2的体积，因而$V_2<V<V_1$。

现在我们求多面体P_1和P_2的体积V_1和V_2。三棱锥内各截面均平行于底面，并与三棱锥底面相似。因此，多面体P_1

的m层的断面积为$S\left(\frac{m}{n}\right)^2$，其中$S$为已知三棱锥的底面积，而$\frac{m}{n}$为相似系数。$m$层的三棱体体积为$S\left(\frac{m}{n}\right)^2\frac{H}{n}$，而多面体$P_1$的体积等于各层体积之和，即

$$V_1=S\frac{H}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{SH}{n^3}(1+2^2+3^2+\cdots+n^2).$$

同理可以求出多面体P_2的体积V_2：

$$V_2=S\frac{H}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{SH}{n^3}\{1+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\},$$

我们知道

$$1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6},$$

而

$$1+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}.$$

因而

$$V_1=\frac{SH}{n^3}\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right)$$

$$=SH\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right),$$

$$V_2=\frac{SH}{n^3}\left(\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right)$$

$$=SH\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right).$$

由此可得：

$$SH\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)<V<SH\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right).$$

因而

$$SH\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)<V-\frac{SH}{3}<SH\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right).$$

由这个不等式，可知V与$\frac{SH}{3}$的差小于$\frac{SH}{n}$。由于n是一个任意数，这就是说，当n无限增大时，V与$\frac{SH}{3}$的差便是一个无限小的数。但总可以有这样一个时刻，即$V=\frac{SH}{3}$.这样，便得出如下结论：**任意三棱锥的体积，等于它的底面积与高的乘积的三分之一，即**

$$V=\frac{1}{3}SH.$$

现在我们研究任意棱锥（非三棱锥）的体积。把这个棱锥的底面分割成若干个三角形：$\triangle_1$，$\triangle_2$，$\triangle_3$，…，$\triangle_n$。这些三角形为棱锥底，已知棱锥的顶点为诸三棱锥的顶点，已知棱锥是由诸三棱锥组成。因而，已知棱锥的体积等于这些三棱锥体积之和。因为，所有三棱锥的高均等于已知棱锥高H，所以，已知棱锥的体积为

$$V=\frac{1}{3}H(S_1+S_2+\cdots+S_n)=\frac{1}{3}HS.$$

因而，**任意一个棱锥的体积等于它的底面积与高的乘积的三分之一。**

相似体的体积　设T和T'是两个相似体。这就是说，存在一个相似变换，变换时体T变成体T'。以k表示相似系数。我们把体T分割成若干个三棱锥：P_1，P_2，…，

P_n。体T的体积等于这些三棱锥的体积之和。体T变成体T'相似变换使三棱锥P_1，P_2，…，P_n变成三棱锥P'_1，P'_2，…，P'_n。这些三棱锥组成体T'，因而体T'的体积等于三棱锥P'_1，P'_2，…，P'_n的体积之和。

因为三棱锥P'_i与P_i是相似的棱锥，且相似系数为k，所以它们的高之比也等于k，而它们的底面积之比等于k^2。因而这两个三棱锥的体积之比等于k^3。因为，体T由棱锥P_i组成，而体T'由棱锥P'_i组成，所以，体T'与T的体积之比等于k^3。

相似系数k等于相似变换时任意两对应点对的距离之比。因而，这数k等于体T'及T的任意两对应线性尺寸之比。从而，可得如下的结论：

两个相似体的体积之比等于它们的对应线性尺寸的立方之比。

根据上述结论，可以求出棱台的体积。现在我们来证明棱台体积的的公式：

$$V=\frac{1}{3}H\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right),$$

式中S_1和S_2为棱台的底面积，H为棱台的高。

在已知棱台上补一个小棱锥，使其成一个大棱锥。以H_1表示大棱锥的高，并以S_1表示大棱锥的底面积，再以H_2表示所补棱锥的高，而以S_2表示所补棱锥的底面积。因为这两个棱锥相似，所以它们底面积之比等于它们高之比的平方。而它们体积之比等于它们高之比的立方，即

$$\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2, \qquad \frac{V_2}{V_1}=\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^3.$$

可得：

$$V=V_1-V_2=V_1\left(1-\frac{V_2}{V_1}\right)=V_1\left[1-\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^3\right]$$
$$=V_1\left(1-\frac{H_2}{H_1}\right)\left[1+\frac{H_2}{H_1}+\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2\right]$$
$$=V_1\left(1-\frac{H_2}{H_1}\right)\left(1+\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}+\frac{S_2}{S_1}\right)$$
$$=\frac{V_1}{H_1S_1}(H_1-H_2)(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2).$$

因为　$H_1-H_2=H$，

而　　$V_1=\frac{1}{3}H_1S_1$，

所以　$V=\frac{1}{3}H(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$.

计算棱台体积的公式得证。

简单几何体的体积定义　简单几何体可分成若干个三棱锥，求这些三棱锥的体积之和，即求该简单几何体的体积。但是每一个简单几何体都可以采用不同分割方法，将其分割成若干个三棱锥；而计算每一个三棱锥的体积时，又可以选择不同侧面作其底面。这便出现如下两个问题：

1．三棱锥的体积是否与其底面的选择无关？

2．简单几何体的体积是否与其分割三棱锥的方法无关？

如果对上面两个问题的回答是肯定无关，那么，我们对体积所下的定义就是正确的。

首先，我们证明：三棱锥的体积与选择哪一个侧面

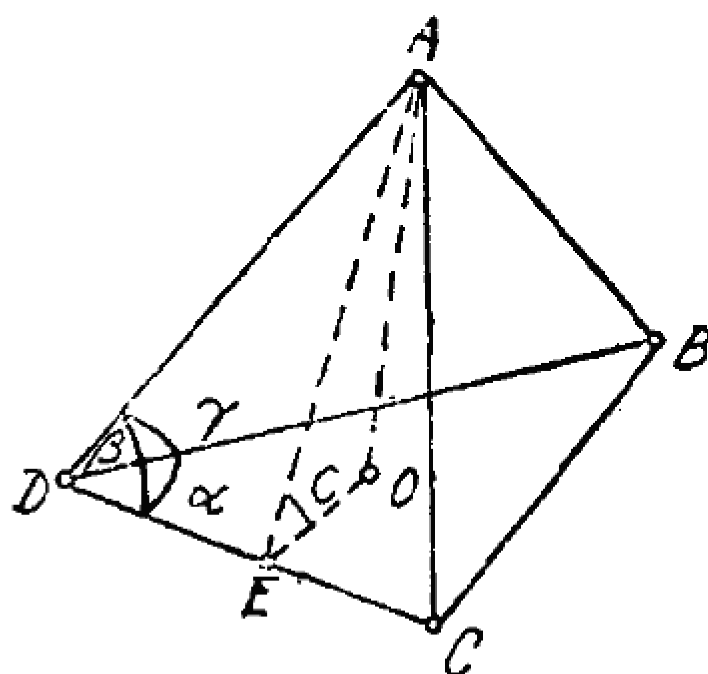


图　213

作为底面无关。设$DABC$是一个三棱锥（如图213）。以α、β、γ表示三棱锥顶点D的三个面角。即以α表示$\angle BDC$，以β表示$\angle ADC$，而以γ表示$\angle ADB$，以a、b、c表示D为顶点的三面角的各个二面角，即用a表示棱DA的二面角，用b表示棱DB的二面角，用c表示棱DC的二面角。

现在自顶点A向棱DC作垂线AE，并自顶点A向侧面BDC作垂线AO。我们取侧面BDC为三棱锥的底面，则底面积为

$$S=\frac{1}{2}DB\cdot DC\cdot \sin\alpha.$$

三棱锥的高为

$$\begin{aligned}H=AO&=AE\sin c\\&=DA\sin\beta\sin c.\end{aligned}$$

因而，三棱锥的体积为

$$V=\frac{1}{6}DA\cdot DB\cdot DC\cdot\sin\alpha\sin\beta\sin c.$$

如果取侧面ADB为三棱锥的底面，同理可求出，三棱锥体积的另一表达式为

$$V=\frac{1}{6}DA\cdot DB\cdot DC\cdot\sin\alpha\sin\gamma\sin b.$$

在上面所得出的关于三棱锥体积的两个表达式中，只有因子$\sin\beta\sin c$和$\sin\gamma\sin b$不同。但这两个因子是相等的。事实上，根据正弦定理，对以D为顶点的三面角，可有

$$\frac{\sin\beta}{\sin b}=\frac{\sin\gamma}{\sin c}.$$

由此得出

$$\sin\beta\sin c=\sin\gamma\sin b.$$

因而，可得出如下结论：**三棱锥的体积与其底面的选择**

无关。

现在我们转到第二个问题。取一个三棱锥并把它分割成若干个小三棱锥。现在证明：根据公式$V=\frac{1}{3}SH$所计算出的三棱锥的体积等于根据同一公式所计算出的各个分割成的小三棱锥体积之和。首先，我们研究特定的分割方法：分割后的各个小三棱锥与已知的三棱锥有公共的顶点，且各个分割后的小三棱锥的底面都在已知的三棱锥的底面上。如果S_1，S_2，…，S_n表示分割后小三棱锥的底面积，那么所有这些小三棱锥的体积之和为

$$V=\frac{S_1H}{3}+\frac{S_2H}{3}+\cdots+\frac{S_nH}{3}$$

$$=\frac{1}{3}(S_1+S_2+\cdots+S_n)H$$

$$=\frac{1}{3}SH.$$

这就是已知三棱锥的体积。

现在我们研究把已知三棱锥$ABCD$任意分割成若干小三棱锥$PQRS$。设所分割的任意两个小三棱锥或者没有公共点，或者有一个公共顶点；或者有一条公共棱，或者有一个公共侧面。

三棱锥$PQRS$的体积可以用四个三棱锥：$AQRS$，$PARS$，$PQAS$及$PQRA$的体积代数和来表示。这四个三棱锥是如下得到的：把三棱锥$PQRS$中的一个顶点依次用已知三棱锥的顶点A来表示。按下列规则决定这个代数和的各项正负号：假如顶点A所代替的顶点与其所对的侧面和点A位于同一侧，则这一项的符号取“+”；假如顶点A所代替的顶点与其所对的侧面和点A不在同一侧，则这一项的符号取“−”；

假如用顶点A代替后，四点在同一平面内，那么这一项将被消掉，因为此时它的体积等于零。

如果我们把所分得的每一个三棱锥的体积均用A为顶点的三棱锥体积代数和来表示，那么我们得到形如$AXYZ$的三棱锥体积的代数和，其中XYZ是这种分割方法所得到的一个侧面。假如侧面XYZ在已知三棱锥$ABCD$之内，则三棱锥$AXYZ$的体积在我们的代数和中将出现两次，理由是此时侧面XYZ恰好是两个棱锥的分割面。这两个三棱锥，对于它们的公共面XYZ而言，位于不同的两侧，因此棱锥$AXYZ$的体积一次为“＋”号，而另一次为“－”号。其结果在代数和中互相抵消。

如果侧面XYZ位于已知三棱锥的底面BCD上，那么棱锥$AXYZ$的体积在我们的代数和中只能出现一次，而且为“＋”号。如果三棱锥的侧面XYZ在已知棱锥$ABCD$的其它三个侧面上，那么三棱锥$AXYZ$的体积等于零。总之，我们所分割的三棱锥体积之和等于若干个形如三棱锥$AXYZ$的体积之和，而三棱锥$AXYZ$的侧面XYZ均位于已知三棱锥的侧面BCD上。这就证明，这个和等于已知三棱锥的体积。

现在我们假设，已知的几何体以第一分割法分割成若干个三棱锥P'_1，P'_2，P'_3，…，而以第二分割法分割成若干个三棱锥P''_1，P''_2，P''_3，…，求证：这两种分割法所得的三棱锥体积之和相等。

第一和第二分割法所分得的三棱锥可将已知几何体分割成若干个凸多面体，而每个凸多面体又都是第一分割法的一个三棱锥和第二分割法的一个三棱锥的公共部分。我们还可以将这些凸多面体再分割成更小的三棱锥P'''_1，P'''_2，P'''_3，…，分割时可使其中任意两个小三棱锥或者没有公共点，或者有

一个公共顶点；或者有一条公共棱，或者有一个公共侧面。这种分割法永远是可能的。

根据上述证明可以断定，第一分割法所分得的每一个三棱锥的体积等于它所包含的所有小三棱锥P_K'''的体积之和。第二分割法所分得的每一个三棱锥的体积也正好等于这些小三棱锥P_K'''的体积之和。因此，无论第一分割法所分得的三棱锥体积之和，还是第二分割法所分得的三棱锥体积之和都等于所有小三棱锥P_K'''的体积之和。由此可见这两种分割法所分得的三棱锥体积之和相等。这就是说，简单几何体的体积与其分割成三棱锥的方法无关。

习　题

1. 证明：如果过正四面体一条棱的平面将这条棱所对的棱分割成两段，其比为$m:n$，那么这个平面将正四面体分割成两个四面体，其体积之比仍为$m:n$。
2. 设平面α与从正四面体一顶点引出的三条棱相交，并且平面α将这三条棱各分割成两段，其比为$\frac{m}{n}$，$\frac{p}{g}$，$\frac{r}{S}$（从其公共顶点算起）。求证，平面α所截去的四面体的体积等于
$$\left(\frac{m}{m+n}\right)\left(\frac{p}{p+g}\right)\left(\frac{r}{r+s}\right)V.$$
式中V为已知正四面体的体积。
3. 如果正四面体的两条相对的棱沿着两条异面直线滑动，那么这正四面体的体积不变。
4. 一平面α垂直于一棱柱的各个侧棱，但不与其底面相交。求证：棱柱的体积等于平面α与棱柱的截面积与侧棱长

的乘积。

5. 已知一个平行六面体的过一顶点的三条棱为 a、b、c，并且每二棱所夹的角为 α，β、γ。试求这个平行六面体的体积。

§27. 旋 转 体

圆柱 设 α 和 α' 是两个互相平行的平面，而 a 是与这两个平面相交的一条直线。设 k 为平面 α 上任意一个圆域（如图214）。过圆域 k 上任意一点 X，作直线 a 的平行线，这条直线在平面 α 和 α' 之间的线段，以 a_x 表示。如果点 X 描出圆域 k，那么所有线段 a_x 便组成一个几何体，这个几何体称为**圆柱**。

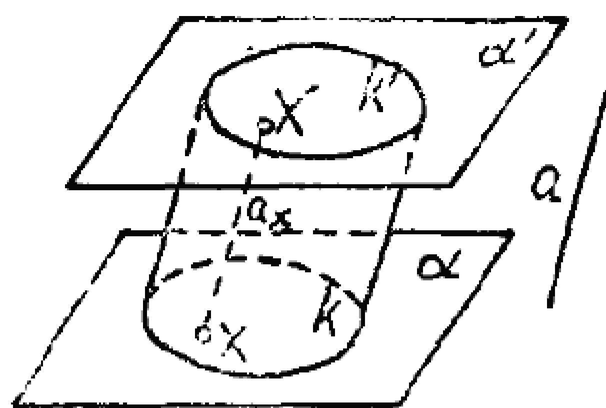


图 214

圆柱的全面积是由圆域 k、在平面 α' 上与圆域 k 相等的圆域 k' 及**圆柱的侧面**构成。当点 X 遍及圆域 k 的圆周时，所有线段 a_x 即描出圆柱的侧面。此时线段 a_x 本身称为**圆柱的母线**。圆域 k 和 k' 称为**圆柱的底面**。

如果圆柱中所有母线垂直于两个底面，那么这样的圆柱称为**直圆柱**。我们只研究直圆柱，直圆柱通常简称为**圆柱**。

过圆柱底面中心并与母线平行的直线称为**圆柱轴**。用过圆柱轴的平面截圆柱所得的截面称为**轴截面**。如果一平面过圆柱的一条母线、且与过这条母线的轴截面互相垂直，那么这平面称为**圆柱的切面**。

定理27.1 平行于圆柱轴的平面或不与圆柱的侧面相

交，或与圆柱的侧面相交于两条母线，或与圆柱相切。

垂直于圆柱轴的平面，截圆柱所得的截面是和底面相等的圆。

证明 首先证明第一个结论。设α是平行于圆柱轴的平面（如图215），圆柱的侧面向圆柱底面所在平面上的正投影是一个圆周x，而平面α的正投影是一条直线a，此直线a是平面α与底面所在平面的交线。如果直线a不与圆周x相交，则平面α不与圆柱的侧面相交。如果直线a与圆周x相交于两点P和Q，则平面α与圆柱侧面相交于过点P和Q的两条母线。最后，如果直线a与圆周x相切，则平面α与圆柱相切于一条母线，这条母线一个端点是直线a与圆周x的切点。

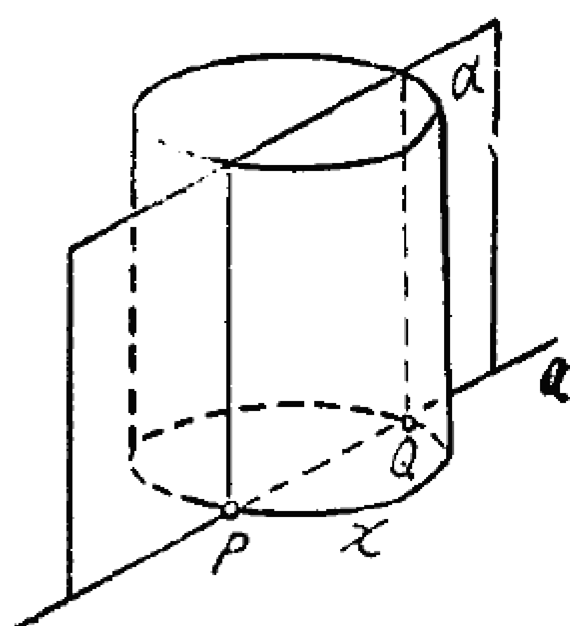


图 215

现在证明第二个结论。设β是与圆柱轴相垂直的一平面，平面β与圆柱的底面平行，平面β沿着圆柱轴向圆柱底面平移，平面β将与圆柱的底面重合，平面β截圆柱所得的截面将与圆柱底面的圆相重合。定理得证。

圆柱的内接棱柱指的是如下的棱柱：棱柱底面所在平面重合于圆柱底面所在平面，而棱柱侧棱都是圆柱的母线（图216—左）。**圆柱的外切棱柱**指的是如下棱柱：棱柱底面所在平面重合于圆柱底面所在平面，而棱柱的侧面都与圆柱相切（图216—右）。

圆锥 已知α是一个平面，S是平面α外的一点。在平面

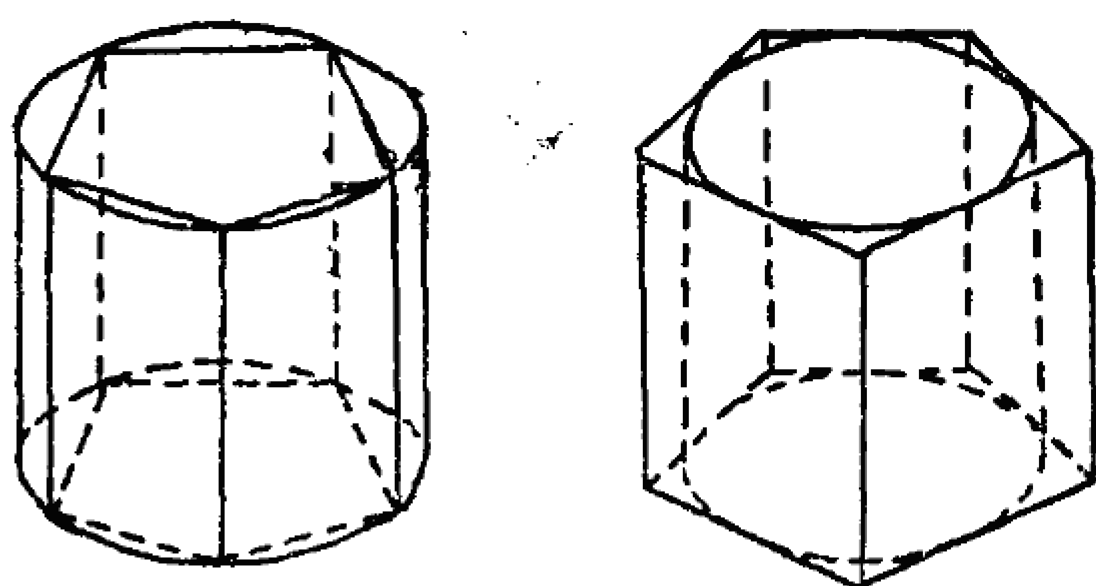


图 216

α上取任意一个圆域k（如图217），X是圆域k上任意一点．连接线段XS，当X点描出圆域k时，所有线段XS组成一个几何体，这个几何体称为圆锥体，简称为**圆锥**．圆锥的全面积由圆k（即**圆锥的底面**）和**圆锥的侧面**构成．当点X沿圆域k的圆周运动时，所有线段XS即描出**圆锥的侧面**．点S称为**圆锥的顶点**．连结圆锥顶点与底面圆周上的点的线段XS，称为**圆锥的母线**．

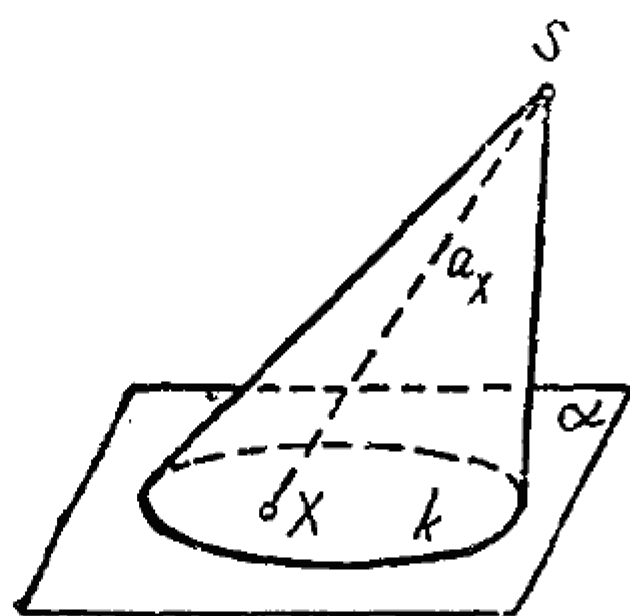


图 217

如果圆锥顶点在其底面的正投影与底面中心重合，则圆锥称**直圆锥**．此时，圆锥顶点向底面作的垂线，称为**圆锥的轴**．我们只研究直圆锥，直圆锥简称为**圆锥**．

用过圆锥轴的平面截圆锥，所得的截面称为圆锥的**轴截面**．过圆锥一条母线、且与过这条母线的轴截面垂直的平面叫做**圆锥的切面**．

定理27.2　过圆锥顶点的平面或与圆锥不再有其它公

共点，或与圆锥的侧面相交于两条母线，或与圆锥的侧面相切。

垂直于圆锥轴的平面，截圆锥所得的是圆域，截圆锥的侧面所得的是以圆锥轴上一点为圆心的一个圆周。

证明 设α是一个过圆锥顶点的平面，而a是平面α与圆锥底面的交线(如图218)。如果直线a与底面的圆周交于两点P和Q，那么，平面α与圆锥的侧面相交于两条母线PS和QS。如果直线a与底面的圆周相切，那么，平面α与圆锥的侧面相切。如果平面α不与底面的圆周相交，那么，除顶点外，平面α与圆锥不再有其它公共点。

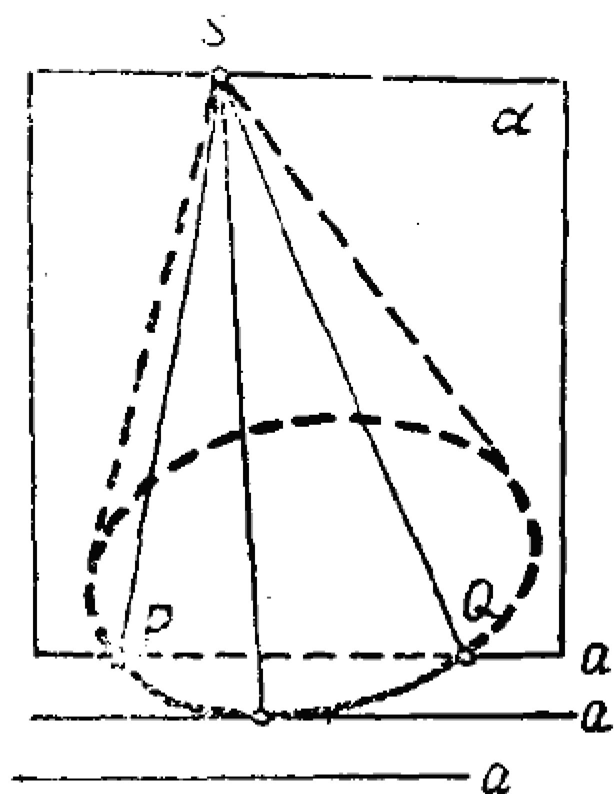


图 218

设平面β与圆锥相交，并且垂直于圆锥的轴。用平面β截圆锥所得的截面与圆锥的底面是关于圆锥顶点的同位相似变换，该截面与圆锥的底面是两个相似形。因而，用平面β截圆锥所得的截面是一个圆域，而截圆锥侧面所得的截线为一个圆周，其圆心为圆锥轴上的一点。定理得证。

圆锥的内接棱锥指的是这样的棱锥：这棱锥的底面是内接于圆锥底面圆周的多边形，并且棱锥的顶点就是圆锥的顶点(如图219—左)。圆锥的内接棱锥的侧棱都是圆锥的母线。**圆锥的外切棱锥**指的是这样的棱锥：这棱锥的底面是圆锥底面的外切多边形，并且棱锥的顶点就是圆锥的顶点（图219—右）。外切棱锥的各侧面都是圆锥的切面。

球 设O为任意一点，又R为任意一个正数。空间内与

点O相距不大于R的一切点所组成的几何体称为**球**。点O称为**球心**，而R称为**球的半径**。球的边界称为**球面**。因此，球面上的点就是到球心距离等于球的半径的点。连结球心和球面上任意一点的线段叫做球的半径。连结球面上两点并通过球心的线段叫做**球的直径**。任意一条直径的两个端点叫做球的**径相对点**。

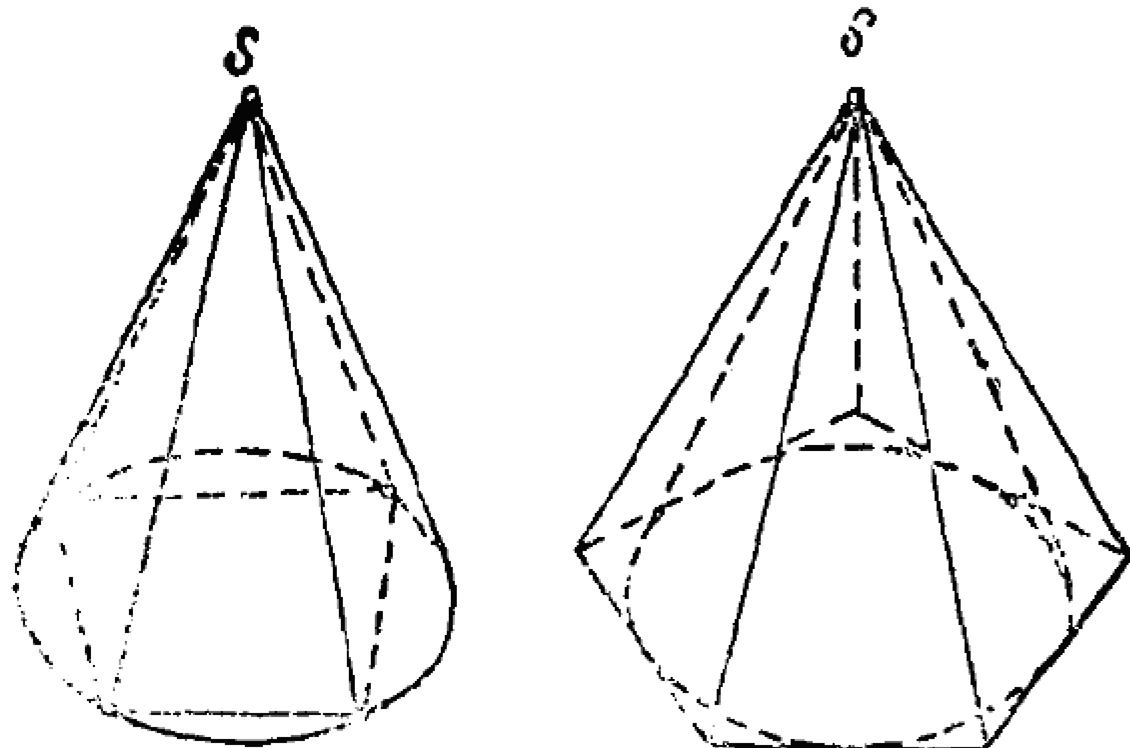


图 219

定理27.3 一个平面截一个球，所得的截面是一个圆域。这个圆域的圆心是球心到截面的垂线的垂足。

证明 设α是一个截平面，而O为球心(如图220)。自球心O向平面α作一条垂线，并以O'表示这条垂线的垂足。设X为位于平面α上的球内任意一点，根据勾股定理可得：

$$(OX)^2=(OO')^2+(O'X)^2.$$

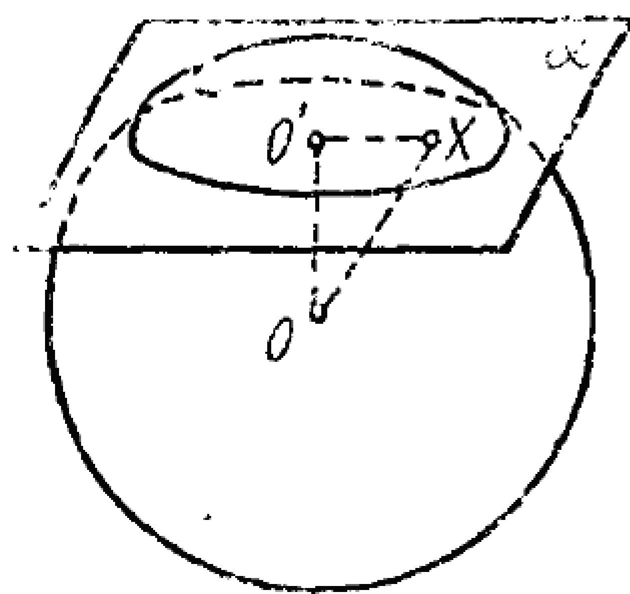


图 220

因为 OX不大于球的半径R，可见

$$O'X\leqslant\sqrt{R^2-(OO')^2},$$

这就是说，平面α截球所得截面内任意一点X到点O'的距离不大于$\sqrt{R^2-(OO')^2}$，所以这点X位于以O'为圆心，以$\sqrt{R^2-(OO')^2}$为半径的圆域内，反之，这个圆域上任何一点X必位于球体内。这就是说，平面α截球所得截面是以O'为圆心的圆域。定理得证。

由定理证明可知，平面α截球所得圆域的半径为

$$R'=\sqrt{R^2-(OO')^2}.$$

由此显然可见：平面α与球心愈近，即OO'愈小，平面α截球所得圆域就愈大。过球心的平面截球所得的圆域最大。此时圆域的半径就是球的半径。**与球心等距离的平面截球所得的圆域相等。**

经过球心的平面也叫**直径平面。**

定理27.4 球的任意一个直径平面都是这球的对称平面。球心是球的对称中心。

证明 设α是一个直径平面，而X为球内任意一点(如图221)。现在我们作出点X关于平面α的对称点X'.线段XX'垂直于平面α并与这平面相交于点A，而点A为线段XX'的中点。根据三角形OAX和三角形OAX'全等，可得到$OX'=OX$.因为，$OX\leqslant R$，所以$OX'\leqslant R$，即点X的对称点也位于球内。定理的第一个结论得证。

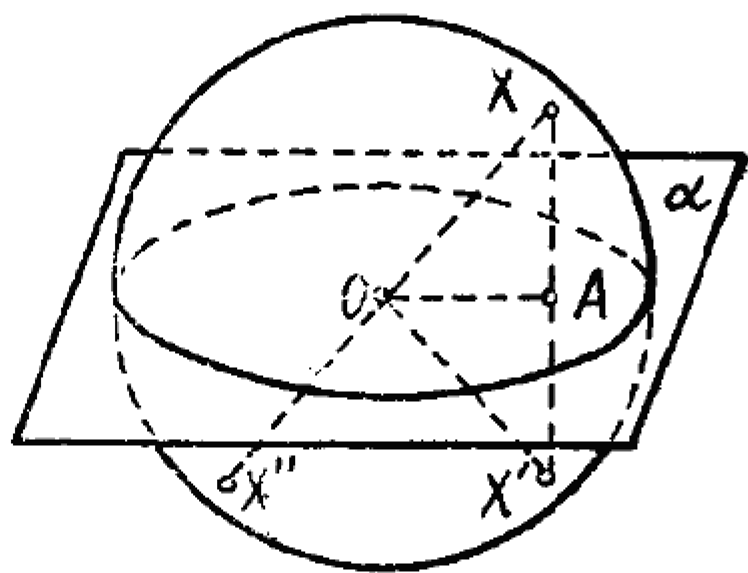


图 221

现在设X''是点X关于球心O的对称点。则$OX''=OX\leqslant R$，，即点X''也位于球内。定理全部得证。

过球心的平面截球所得的截面称为**大圆域。**

定理27.5　过球面上任意两个非直径点可作一个大圆域，而且只可作一个大圆域.

证明　设O是球心，而A和B是球面上已知的两个非直径点（如图222），过已知点A、B、O作一平面α，平面α截球成大圆域. 这个圆域的圆周经过点A及B.

不可能有另一个这样的圆周经过A、B两点. 假设还有一个大圆域经过点A、B和O. 而A、B和O三点不在同一条直线上，经过它们只能有唯一的一个平面，即是平面α. 定理得证.

定理27.6　一个球的任意两个大圆域的圆周必相交，而且只能交于这球的两个径相对点.

实际上，两个大圆域所在的两个平面有一个公共点（即球心），从而这两个平面必相交于某一条过球心的直线. 这条直线与球面的两个交点就是这两个大圆域的圆周交点. 定理得证.

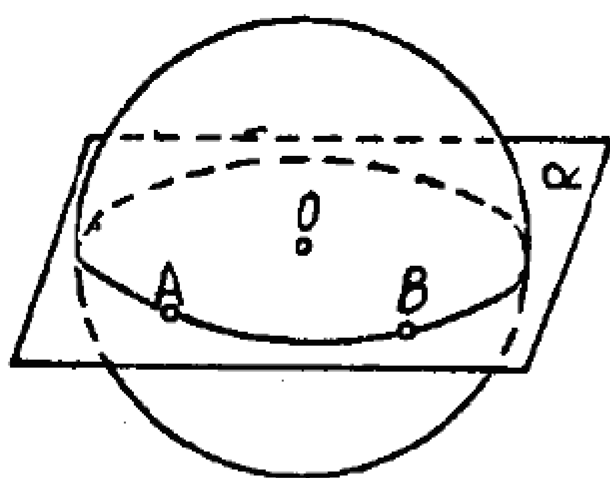


图　222

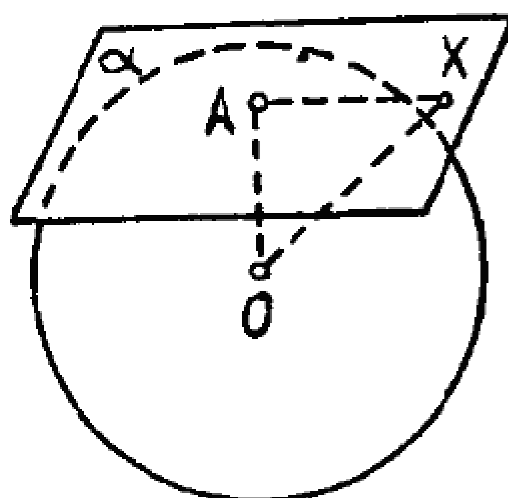


图　223

过球面上一点A、且垂直于过点A的半径的平面叫做**球的切面**. 点A称为**切点**.

定理27.7　球的切面与球只有一个公共点——切点.

证明　设α是球的切面，而A是切点（如图223）. 在平面α上取任意一点X异于点A. 因为线段OA垂直于切面α，

而OX是斜线，故$OX>OA=R$。由此，可知点X在球外。定理得证。

过球面上点A、且垂直于过点A的半径的直线，叫做**切线**。

定理27.8 过球面上任意一点A，可以作无数条切线，所有这些切线都位于球在A点的切面上。

实际上，设α是球在A点的切面（请看图223），此时，平面α内任意一条过点A的直线，都垂直于半径OA，因而这些直线必是切线。过点A的任意切线垂直于半径OA，因而必位于平面α内。

习　题

1. 证明过圆柱轴的平面都是圆柱的对称平面。
2. 证明圆柱是一个旋转体，即绕圆柱轴任意转动，所得到的圆柱相等。
3. 证明：如果两个全等圆柱的轴相交，那么它们侧面的交线位于两个垂直的平面上。
4. 证明：如果平行线段的端点均位于同一圆柱的侧面上，那么这些平行线段的中点均位于过圆柱轴的一个平面上。
5. 证明：圆锥是一个旋转体，即绕圆锥轴任意转动，所得到的圆锥相等。
6. 求证：圆锥的侧面积等于$\frac{S}{\cos\alpha}$，式中S为圆锥的底面积，而α为底面与母线所夹的角。
7. 证明：如果平行线段的端点均位于同一圆锥的侧面上，

那么这些平行线段的中点均位于过圆锥顶点的一个平面上。

8. 证明：从已知一点A向过已知一点B的所有平面所作的垂足的轨迹是一个球面。

9. 证明：各端点位于同一球面上的各条平行线段的中点的轨迹是一个大圆域。

10. 证明：两个球面的交线是一个圆周。

11. 如果过一几何体内点O的任意一个平面均为这几何体的对称平面，求证这几何体是一个球。

第三部分　几何的解析方法

§28. 向量的运算

向量的概念　要说明某些物理量，例如：力、速度、加速度等等，不仅要说明它们的大小，还应指出它们的方向。如，为了表示某物体在已知时刻内的运动，仅仅表示出其运动的速度为60公里/小时，还不足以反映这物理量的本质，还必须指出其运动的方向，即速度的方向。因此，上述诸物理量用有方向的线段表示是方便的。物理量的这种表示法不仅仅是为了直观明显起见，而且还有其它理由。实验证明：如果二力 a 和 b 同时作用于一物体 A（如图224），那么它们的效果等于力 c。力 c 是以 a 和 b 为邻边组成的平行四边形的对角线来表示。这个例子说明：某些物理量用有方向的线段来表示，而它们的运算可归结为简单几何作图。我们还可举出其它一些实例。

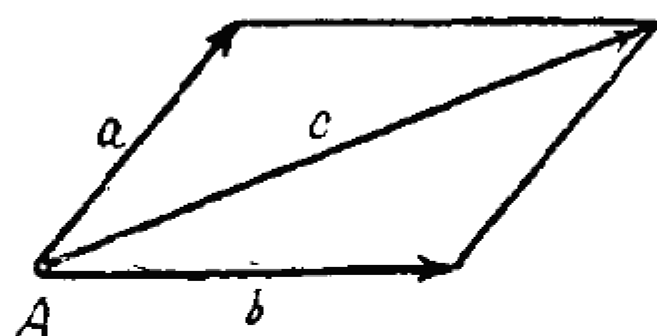


图　224

在本节，我们将建立有方向的线段（即向量）的专门运算法则，这些运算法则在几何中将广泛地被用来证明定理和解题。不少题需要复杂的几何论证，然而借助于向量，便可化为简单的运算。这也正如许多较复杂的算术题，如若利用建立方程方法，即可简单地得解。

我们把有向线段叫做**向量**（如图225）。我们将用小

写的拉丁字母，如：a，b，c，…等来表示向量。有时向量需要以有向线段的两个端点来表示，如图225中的向量 a 可以记作AB。对于向量 a 的这种记法，点A称为向量 a 的起点，而点B称为向量 a 的终点。用两端点表示向量，第一个字母总表示向量的起点，常常在表示向量的字母上边划上一个箭头"→"代替"向量"二字。例如：$\vec{a}$ 读作"向量 a"。

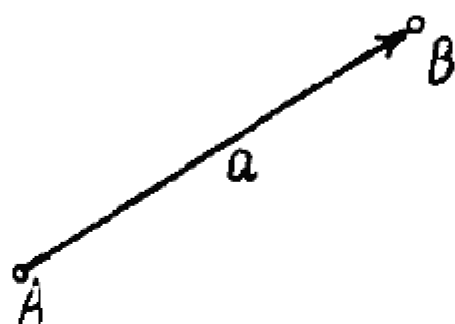


图 225

我们所叙述向量运算法则，是以平移性质为基础所建立的。关于平移的某些性质，我们已熟悉，在 §10已有证明。现在证明我们所需用的一些性质。为了叙述简单起见，我们只研究在平面上的性质。

平移的性质 按本书中 §10的定义，平移是这样一种运动，运动时各点均沿平行线移动同一个距离。这就是说，如果点X及Y变为点X'及Y'，则直线XX'平行于直线YY'（或者两线重合）。而线段XX'等于线段YY'（为常数）。恒等变换，即各点均不动的映象，也被认为是平移。

在本书 §10 中，我们已了解平面自身映象的逆变换仍是运动。因此，由平移的定义，可直接推知如下的一条性质。

28.1 平移的逆映象仍是平移

下面的性质表示出平移的特征，并指出平移与其它一切运动的差别。

28.2 运动时不管如何取点X，如果它与其对应的点X′之间距离均不大于同一个数 d，则该运动就是平移。

证明 首先我们证明：如果运动满足28.2的条件，那么经过运动，每条直线或者变成它自身，或者变成与之平行的

直线。

实际上，假设直线 a 变成直线 b，并且直线 b 与直线 a 既不重合，又不平行（如图226）。现在我们在直线 a 上取一点 A，使点 A 不在直线 b 上，并与直线 b 的距离大于 d。经过上述运动，点 A 将变为直线 b 上某一点 B。因为点 A 到直线 b 的距离大于 d，所以，点 A 到点 B 的距离也大于 d，而这与28.2的条件相矛盾。因此直线 b 或者与直线 a 重合，或者与直线 a 平行。

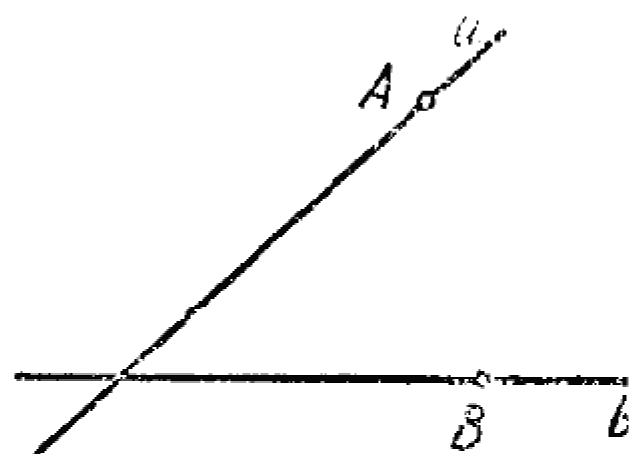


图 226

很明显，任何平移都满足28.2的条件。因此任何平移必具有如下性质。

28.3 经过平移，每一条直线或者变成它自身，或者变为与它平行的直线。

我们继续证明28.2的性质。假设运动后28.2的条件得到满足，某一点 A 变为异于 A 的点 A'（如图227）。在直线 AA' 之外取点 B，经过上述运动，点 B 变为某点 B'。现在我们证明：直线 AA' 与直线 BB' 平行。用反证法，假定这两条直线相交于某点 C。因为点 B 变为直线 CB 上的一点 B'，所以根据已证定理可知，直线 CB 变成它自身。同理还可得出，直线 AC 也变为它自身。因此运动时点 C 保持不动。

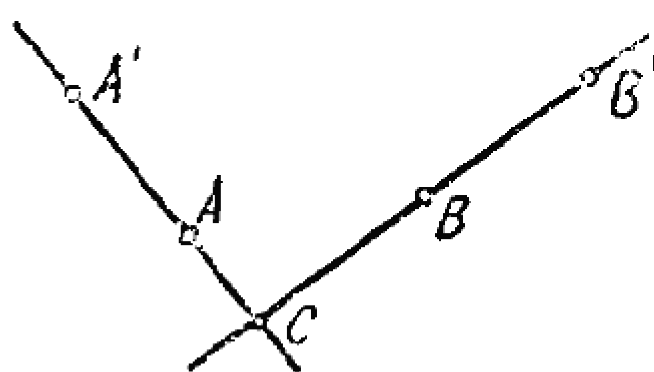


图 227

因为直线 AC 变为它自身，而这条直线上的点 C 为不动点，所以，被点 C 分割的射线 AC 或者变成它自身，或者变成与之相反的射线。我们证明后一种情况不可能成立。

事实上，我们在两条射线当中的某一条上任取一点 X 与点 C 相距为 d，再设 X 变为相反射线上一点 X'，而 X' 与 C 相距也是 d。因为，点 C 分割点 X 和 X'，所以，X 与 X' 相距 $2d$，即大于 d，这与28.2的条件相矛盾，因此，点 X' 与 X 应在同一射线上。又因 X' 与 X 均与 C 相距为 d，所以 X' 应重合于 X。经过上述运动，直线 AC 上全部点都没有动。特别点 A 是不动点，这和假设点 A' 异于点 A 矛盾。因此直线 BB' 平行于直线 AA'。根据已证定理可得知，直线 $A'B'$ 平行于直线 AB，而根据平行四边形的性质。线段 AA' 等于线段 BB'（如图228）。因此，经过上述运动，点 A 和点 B 沿平行直线移动相同的距离。

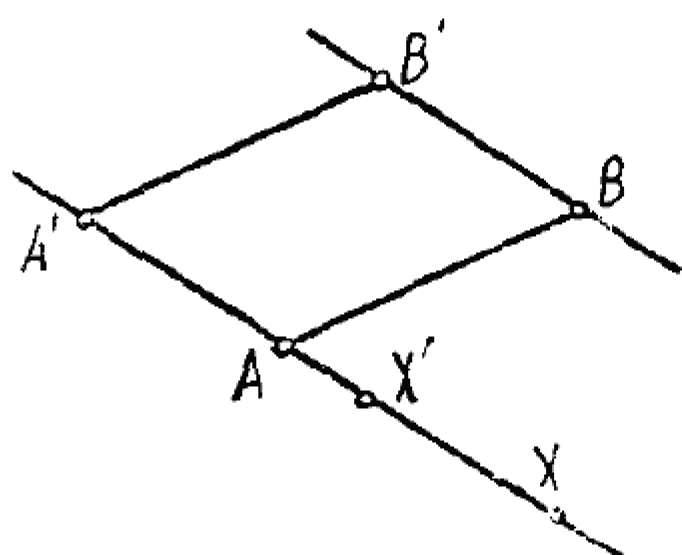


图 228

现在我们在直线 AA' 上取任一点 X。则按上述证明，这点 X 沿平行于 BB' 的直线移动到点 X'，而 X 到 X' 的距离等于线段 BB'。如果点 A' 异于点 A，这便可以证明28.2的性质。如果任意一点 A 都有一点 A' 与其相重合，那么根据定义这种运动是平移。28.2的性质完全得证。

从28.2的性质，可得出如下性质。

28.4 连续进行两次平移，仍然是平移。

这就是说，如果第一次平移后，任意一点变为点 X'，

而第二次平移后，点X'又变为点X''，那么以点 X 和 X 为对应点的映象必是一个平移。事实上，因为平移是运动，而连续进行两次运动，仍然是运动，故以点 X'' 和 X 为对应点的映象，必是运动。这种运动满足28.2的条件。我们知道第一次平移使点移动距离d_1，而第二次平移使点接着移动距离d_2。根据三角形的不等式，有

$$XX''\leqslant XX'+X'X''\leqslant d_1+d_2,$$

即运动$X\to X''$满足28.2条件，所以这运动就是平移。

最后，再重述平移的一个性质(在本书 §10中已证过)。

28.5 不管点A和点A′是两个什么样的点，必存在唯一的一个平移，平移后点A变成点A′。

向量的方向和向量的模 如果平移使射线a'重合于射线a，那么我们就说射线a'具有射线a的方向。因为逆平移使射线a重合于射线a'，所以射线a具有射线a'的方向。因此我们可以简单地说它们是同方向的射线，同方向的射线也叫**同向射线**。

如果平移使射线a与射线a'重合，那么它也必使射线$\bar{a}$与射线$\bar{a}'$重合，而$\bar{a}$和$\bar{a}'$分别是射线a和a'的相补射线(也叫反向射线)。因此，从射线a和a'的同向性可推出它们的相补射线$\bar{a}$和$\bar{a}'$的同向性。根据平移28.4的性质可得出射线的同向性是可传递的。即：如果射线a与a'同向，且射线a'与a''同向，那么射线a与射线a''同向。

如果射线a与射线a'的相补射线$\bar{a}'$同向，那么我们说a及a'是**反向射线**。如果平移使射线a与射线$\bar{a}'$重合，那么这平移必使a的反向射线$\bar{a}$与射线a'重合。因此，如果射线a与a'反向，那么它们的相补射线也必反向。

28.6 如果两射线a及a′在一条直线上，或在两条平

行直线上，那么这两条射线或者同向，或者反向，除此之外，绝无其它可能。

事实上，只有平移才能使射线 a 的起点变成射线 a' 的起点。平移或者使射线 a 与射线 a' 重合，或者使射线 a 与 a' 的反向射线重合。在第一种情况下，射线 a 和 a' 同向；在第二种情况下，射线 a 和 a' 反向。

28.7 射线AB和BA反向

假设射线 AB 和射线 BA 同向。如果平移使射线 AB 与射线 BA 重合，那么平移必使点 A 变成点 B，点 B 变成点 A。设 X 为点 A 与点 B 之间的任意一点。平移后点 X 变为点 X'，点 X' 也必然位于点 A 与点 B 之间。但是此时距离 XX' 小于 AB，然而这点与平移的定义相矛盾。因为射线 AB 和 BA 位于同一条直线 AB 上，按28.6的性质可得知，射线 AB 与射线 BA 或者同向或者反向。它们不是同向射线，而是反向射线。结论得证。

28.8 设A、B、C是一条直线上三点，并且B位于A及C之间，则射线AB与射线AC同向。

事实上，恒等变换可使射线 AB 与射线 AC 重合。

如果知道四点 A、B、C、D 在直线上的相互位置，那么根据28.6—28.8的性质，总可断定射线 AB 和 CD 是同向或反向。

28.9 设AB及CD是两条射线，分别位于两平行直线AB及CD上，如果两射线AB及CD位于截线AC的同一侧，那么两射线同向；如果两射线AB及CD位于截线AC的异侧，那么两射线反向（如图229）。

事实上，根据28.6的性质，可以断定射线 AB 和射线 CD 或者同向，或者反向。唯有平移才能使点 A 与点 C 相重合。

平移时射线AB上的每一点X沿平行于截线AC的直线移动到某点X'，因而点X'与点X位于截线AC的同一侧。因此平移可使点A变为点C，使射线AB变为射线CD，如果射线AB和CD

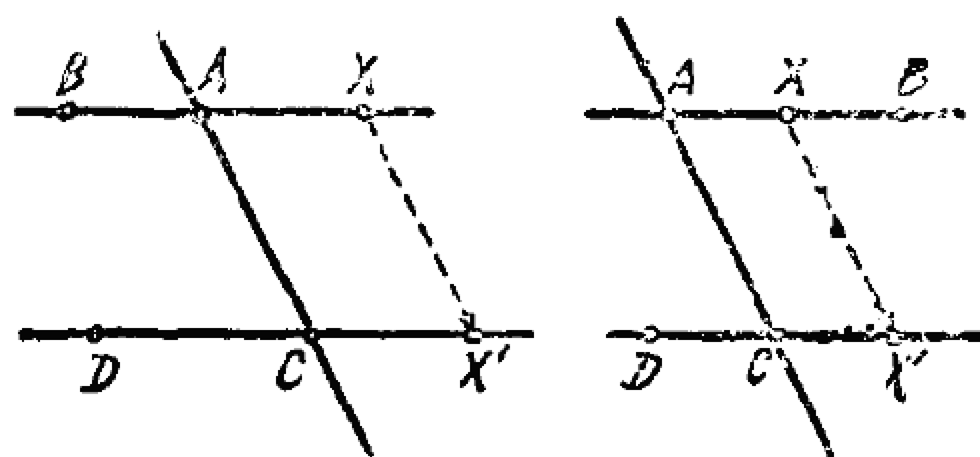


图 229

位于截线AC同一侧（如图229—左），那么射线AB与CD同向。如果射线AB和CD分居于截线AC的异侧，那么射线AB和CD反向（如229—右）。结论得证。

向量AB的方向是指射线AB的方向，而**向量AB的模**是指线段AB的长（记作$|AB|$）。

如果平移使向量AB重合于向量CD，那么向量AB等于向量CD。同时向量AB的起点A重合于向量CD的起点C，并且向量AB的终点B重合于向量CD的终点D。因为，逆向平移使向量CD与向量AB相重合，所以，由向量AB等于向量CD，可以推出向量CD等于向量AB。因而，我们可以讲，向量AB与向量CD相等。由平移28.4的性质，可以得出，向量相等是可传递的，即如果向量a等于向量b，而向量b又等于向量C，则向量a必然等于向量C。很明显，相等的向量，其模相等，并且其方向相同。

28.10　如果向量AB和CD的方向相同，并且它们的模也相等，那么这两个向量便相等。

事实上，因为向量AB和CD的方向相同，所以平移时点A变为点C，射线AB与射线CD相重合。此时，又因两线段AB与CD的长度相等，则点B变成点D。因此，平移使向量AB与向量CD相重合，这就意味着，这两个向量相等。结论得证。

28.11　无论点A′是什么样的点和向量a是什么样的向量，以点A′为起点有一个、而且只能有一个与向量a相等的向量a′。换句话说，从每一点可作一个、而且只能作一个等于已知的向量。

根据平移28.5的性质可知：无论点A和点A'是两个什么样的点，只有通过平移才能使点A变成点A'。结论28.11所谈及的平移使向量a的起点变成点A'。

当我们研究向量的两端点相重合（AA)时，我们发现，用向量的两端点来表示向量（AB）是比较适宜的。我们称起点和终点重合的向量为零向量，记作零（0）。零向量没有明确的方向。零向量的模等于零。根据定义，所有零向量均相等。

向量的加法和减法　向量AC是向量AB与向量BC之和（记作$AB+BC$）。如果向量BC等于向量PQ，那么向量AB与任意向量PQ之和，即为向量AB与向量BC之和（如图230）。根据定义，对任意向量a和零向量，都有

$$a+0=0+a=a.$$

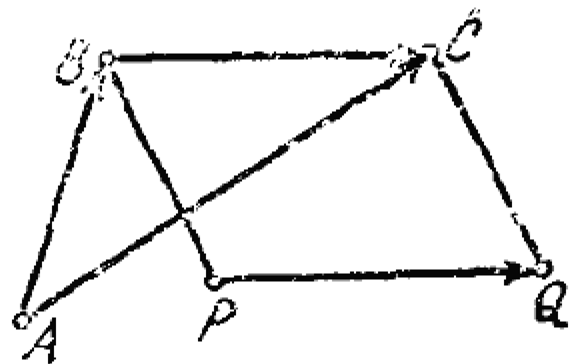


图　230

28.12　如果向量AB等于向量A′B′，并且向量CD等于向量C′D′，则

$$AB+CD=A'B'+C'D'.$$

事实上，如果把向量CD换成与之相等的向量BC_1，那么左端的向量不变。同样，如果把向量$C'D'$换为与之相等的向量$B'C'_1$，那么右端的向量也不变。此时，左端成为向量AC_1，而右端成为向量$A'C'_1$。余下只须证明向量等式$AC_1=A'C'_1$。

我们以P来表示，使点A变成点A'的平移。因为向量AB等于向量$A'B'$，所以，当平移P时，点B必然变为点B'（28.11）。向量BC_1等于向量$B'C'_1$，由此我们断定，平移p时点C_1变为点C'_1。因此平移P使向量AC_1与向量$A'C'_1$重合，故向量AC_1等于向量$A'C'_1$。结论得证。

28.13 对任意向量a、b、c，有

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

向量加法的这条性质称为加法结合律。

证明 我们作向量AB等于向量a，作向量BC等于向量b，作向量CD等于向量c，根据向量加法的定义，可以直接推出

$$(AB+BC)+CD=AB+(BC+CD)=AD.$$

如果在上面的等式中，把向量AB、BC、CD分别换为与之相等的向量a、b、c，那么等式仍成立（28.12）。结论得证。

28.14 对任意向量a和b，有

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}.$$

向量加法的这条性质称为**加法交换律**。

证明 假如二向量a及b中有一个等于零，按定义等式$a+b=b+a$成立。我们研究向量a及b均不为零、且不共线的情况（两向量共线指的是两向量位于同一条直线上，或分别位于两条平行线上）。我们作向量AB等于向量a，

然后作向量 BC 等于向量 b。把三角形 ABC 增补成平行四边形$ABCD$（图231）。显然向量等式为

$$AB+BC=AD+DC. \qquad (1)$$

根据平行四边形的性质，可以得出

$$|AD|=|BC|, \qquad |DC|=|AB|.$$

根据28.9的性质，可以得知向量 AB 与向量 DC 同向，而向量 AD 与向量 BC 同向。因此

$$AD=BC=b, \quad DC=AB=a.$$

在等式（1）中，把向量AB、BC、AD及DC分别换为与之相等的向量 a、b、b、a，即得

$$a+b=b+a.$$

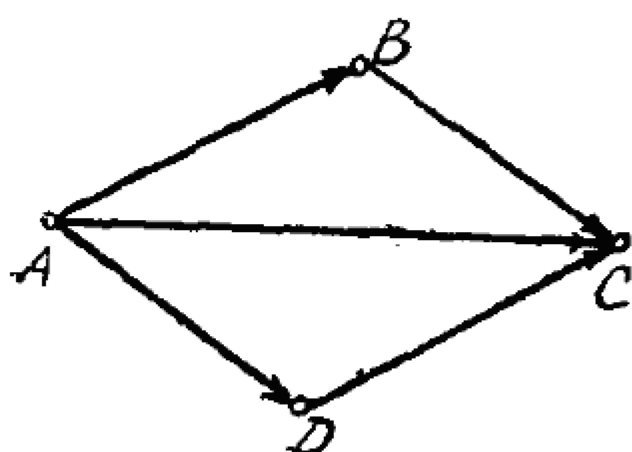


图 231

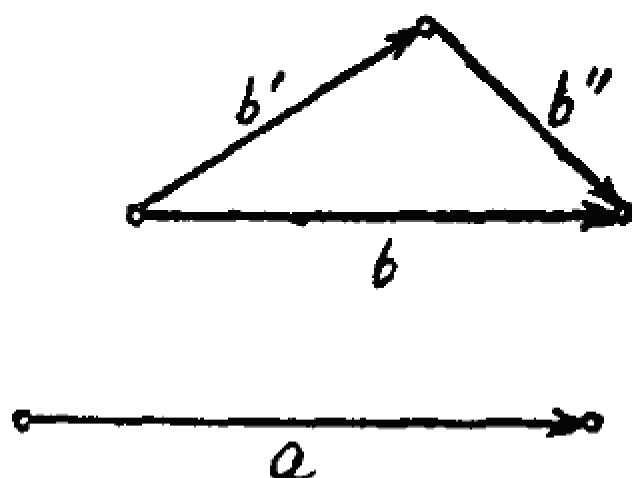


图 232

再研究共线向量 a 和 b 的情况。把向量 b 换为任意两个与向量 a 不共线的向量b'及b''之和（如图232）。

按已证的定理

$$a+b'=b'+a, \qquad a+b''=b''+a.$$

于是

$$a+b=a+(b'+b'')=(a+b')+b''$$
$$=(b'+a)+b''=b'+(a+b'')=b'+(b''+a)$$
$$=(b'+b'')+a=b+a.$$

结论完全得证。

向量 AB 的**反向量**（记作 $-AB$）指的是向量 BA。根据定义，零向量的反向量仍为零向量（$-0=0$）。向量 a 及 b 之差（记作 $a-b$）指的是向量 a 与向量 b 的反向量 $-b$ 之和

$$a-b=a+(-b).$$

根据反向量的定义，可以得出 $-(-b)=b$。所以，

$$a-(-b)=a+b,$$

即对向量运算而言，"＋"和"－"符号的利用与代数运算规则相同。

应当指出，具有公共起点 A 的向量 AB 和 AC 之差可写成（如图233）：

$$AB-AC=CB.$$

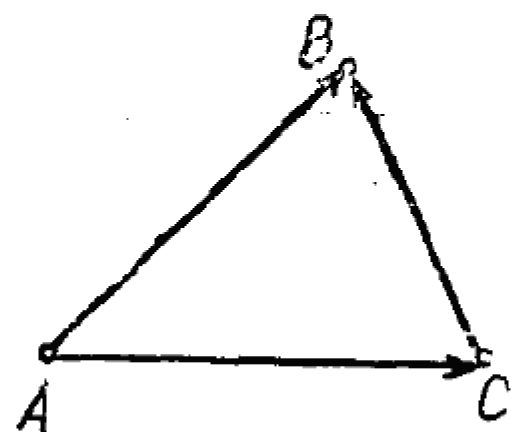


图 233

28.15 设 a 和 b 是两共线向量．如果向量 a 和 b 同向，那么 $|a+b|=|a|+|b|$，而向量 $a+b$ 的方向与向量 a 和向量 b 的方向相同；如果向量 a 和向量 b 反向，并且 $|a|>|b|$，那么

$$|a+b|=|a|-|b|,$$

而向量 $a+b$ 的方向与向量 a 的方向相同。

证明 作向量 AB 等于向量 a，然后作向量 BC 等于向量 b。设向量 a 和向量 b 同向，则向量 AB 和向量 BC 同向，而由于向量 BA 和向量 BC 反向（如图234—左）。因此射线 BA 和射线 BC 是相补的，故点 B 必位于点 A 和点 C 之间。因此，可得出

$$|a+b|=|AB+BC|=|AC|$$
$$=|AB|+|BC|=|a|+|b|.$$

向量 $a+b=AC$ 的方向同于向量 $AB=a$ 的方向（28.8）。



图 234

现在设向量 a 和向量 b 反向，且 $|a|>|b|$。向量 BC 和向量 BA 同向（如图234—右）。因 $|AB|>|BC|$，故点 C 位于点 A 和点 B 之间。因此，可得

$$|a+b|=|AB+BC|=|AC|$$
$$=|AB|-|BC|=|a|-|b|.$$

根据28.8的性质，向量 $a+b=AC$ 的方向同于向量 AB 的方向，即同于向量 a 的方向。结论完全得证。

数和向量的积 如果同时出现向量和数，为了避免混淆，我们用小写希腊字母 λ，μ，ν，…表示数。数 λ 和向量 a 之积（记作 $a\lambda$）指的是一个向量，此向量由下列规定确定。如果数 λ 等于零，或向量 a 为零向量，那么，$a\lambda$ 为零向量，即 $a\lambda=0$。如果数 λ 及向量 a 均异于零，那么 $a\lambda$ 是一个模为 $|a|\ |\lambda|$ 的向量，并且当 $\lambda>0$ 时，$a\lambda$ 与向量 a 同向，当 $\lambda<0$ 时，$a\lambda$ 与向量 a 反向。根据定义，$\lambda a=a\lambda$。

28.16 无论 λ 和 μ 是什么数及向量 a 是什么向量，都有

$$(a\lambda)\mu=a(\lambda\mu) \qquad \text{（结合律）}.$$

事实上，如果 λ 和 μ 两数中有一个等于零，或向量 a 是零向量，那么不难看出两向量 $(a\lambda)\mu$ 和 $a(\lambda\mu)$ 均为零向量，因而两向量彼此相等。

如果数 λ、μ 和向量 a 均异于零，那么两向量 $(a\lambda)\mu$ 和 $a(\lambda\mu)$ 的模均为 $|a|\ |\lambda|\ |\mu|$，并且当 $\lambda\mu>0$ 时，两向量均与

向量a同向，而当$\lambda\mu<0$时，两向量均与向量a反向，因此，两向量$(a\lambda)\mu$及$a(\lambda\mu)$的模相等，并且其方向相同，故两向量相等，结论得证。

28.17 不管λ和μ是什么数及向量a是什么向量，都有

$$a(\lambda+\mu)=a\lambda+a\mu\text{（分配律Ⅰ）}.$$

证明 当$\lambda=0$时，等式两端均等于$a\mu$，故两端相等。同样，当$\mu=0$时，等式两端均等于$a\lambda$。当$a=0$时等式两端均等于零向量。当$\lambda>0$，$\mu>0$和$a\neq0$时，等式两端的向量均有模$(\lambda+\mu)|a|$，并均与向量a同向。在其它情况下：当$\lambda<0$，$\mu<0$；或$\lambda>0$，$\mu<0$；或$\lambda<0$，$\mu>0$时，也可确信向量等式$a(\lambda+\mu)=a\lambda+a\mu$是成立的。请读者自己练习验证。

28.18 不管向量a和b是什么向量及λ是什么数，都有

$$(a+b)\lambda=a\lambda+b\lambda\text{（分配律Ⅱ）}.$$

证明 如果向量$b=0$，那么两向量$(a+b)\lambda$和$a\lambda+b\lambda$均等于$a\lambda$，故两向量相等。同理，如果$a=0$，两向量均等于$b\lambda$.如果$\lambda=0$,那么两向量$(a+b)\lambda$和$a\lambda+b\lambda$均为零向量。

现在设数$\lambda>0$，并设向量a及向量b均不是零向量，并且不共线.取向量AB等于向量a，然后作向量BC等于向量b（如图235）。对平面进行关于点A的同位相似变换，其相似系数为λ，此时B和C两点分别变成B_1和C_1。我们可得

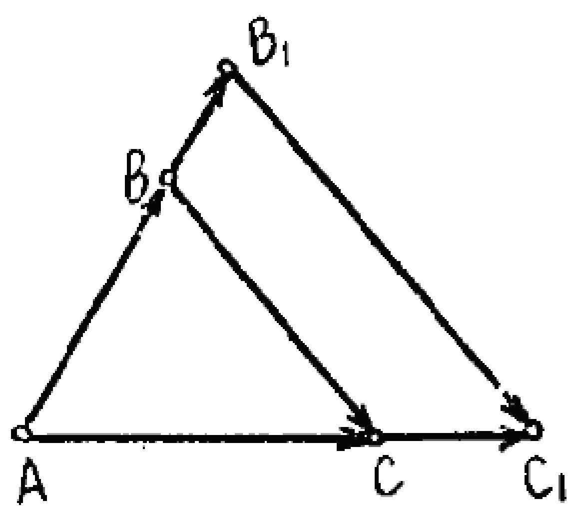


图 235

$$AC_1=AB_1+B_1C_1. \quad (2)$$

向量AC_1与向量AC同向（28.8），而向量AC_1的模等于

$|AC|\lambda$. 因此，有向量等式

$$AC_1 = AC\lambda = (a+b)\lambda.$$

同理可证，向量$AB_1 = a\lambda$。向量B_1C_1与向量BC同向(28.9)，而向量B_1C_1的模$|B_1C_1| = |b|\lambda$。因此，$B_1C_1 = b\lambda$。现在由等式（2）即得

$$(a+b)\lambda = a\lambda + b\lambda.$$

如果λ为负，那么等式中所有向量均换为各自的反向量，可见等式仍然成立。

最后研究共线向量a及b的情况，我们以两个不共线向量b_1和b_2之和来表示向量b（如图232）。则按上述证明，可有向量等式：

$$\begin{aligned}(a+b)\lambda &= (a+b_1+b_2)\lambda = (a+b_1)\lambda + b_2\lambda \\ &= a\lambda + b_1\lambda + b_2\lambda = a\lambda + (b_1+b_2)\lambda \\ &= a\lambda + b\lambda.\end{aligned}$$

结论得证。

28.19　如果向量 a 不是零向量，并且向量 b 是任意一个与向量 a 共线的向量，那么它们之间的关系只能有一种表达式：

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}\lambda.$$

证明　如果向量b等于零，那么$b = a\cdot 0$。如果向量b异于零，并与向量a同向，那么

$$b = a\frac{|b|}{|a|}.$$

如果向量b和向量a反向，那么

$$b = -a\frac{|b|}{|a|}.$$

现在证明这个关系式的唯一性。假设向量 b 有两个表达式：

$$b=a\lambda,\qquad b=a\mu\quad(\lambda\neq\mu).$$

两式相减，可得向量等式

$$0=a\lambda-a\mu=a(\lambda-\mu).$$

左端为零向量，而右端显然异于零向量，因为它的模 $|a||\lambda-\mu|\neq0$。这点与假设相矛盾。唯一性得证。

28.20 如果向量a和b均异于零，并且是不共线，那么向量C只可有唯一的一个表达式：

$$c=a\lambda+b\mu.$$

证明 如果c是零向量，则

$$c=a\cdot0+b\cdot0.$$

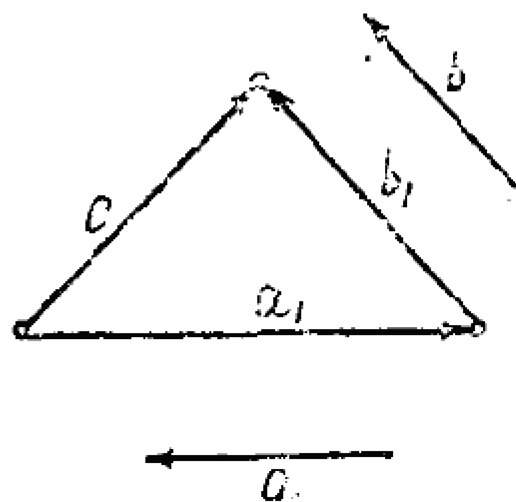


图 236

设向量 c 不是零向量。过向量 c 的两端点分别作直线平行于向量 a 和向量 b（如图236）。其结果，我们得到向量等式：

$$c=a_1+b_1,$$

其中向量 a_1 和 b_1 分别与向量 a 和向量 b 共线。按28.19可得

$$a_1=a\lambda,\qquad b_1=b\mu.$$

因此，

$$c=a\lambda+b\mu.$$

我们来证唯一性，设有两个不同的表达式：

$$c=a\lambda_1+b\mu_1,\qquad c=a\lambda_2+b\mu_2.$$

两式相减，我们可得向量等式：

$$0=a(\lambda_1-\lambda_2)+b(\mu_1-\mu_2).$$

因向量 a 和向量 b 不是共线的，所以这等式只有当 $\lambda_1-\lambda_2=0$，$\mu_1-\mu_2=0$ 时才能成立，唯一性得证。

向量的数量积　两射线 a 和 b 的夹角指的是分别与它们同向并且有公共起点的射线 a_1 和 b_1 的夹角。角的这个定义与射线 a_1 和 b_1 的公共起点的选择无关，因为，使起点重合的平移必将射线变成同向射线。两向量 AB 和 CD 的夹角指的是两射线 AB 和 CD 的夹角。

向量 a 和向量 b 的**数量积**（记作 ab）指的是两向量的模及其夹角 α 的余弦的乘积：

$$ab=ba=|a||b|\cos\alpha.$$

如果两向量中有一个是零向量或两个都是零向量，根据定义，两向量的数量积为零。

28.21　对于任意向量 a 和 b 及任意数 λ、μ，都有

$$(\lambda \mathbf{a})(\mu \mathbf{b})=(\lambda\mu)(\mathbf{ab}).$$

证明此等式，只须指出以下性质：如果向量 a 和 b 的夹角为 α，那么当 $\lambda\mu>0$ 时，向量 λa 和 μb 的夹角仍为 α，而当 $\lambda\mu<0$ 时，向量 λa 和 μb 的夹角为 $180°-\alpha$。

28.22　对于任意三向量 a、b、c，有

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c}=\mathbf{ac}+\mathbf{bc}. \quad \text{（分配律）}$$

证明　首先我们研究在直线上的投影。向量 A_1B_1 是向量 AB 在直线 g 上的**投影**，向量 A_1B_1 的起点 A_1 是向量 AB 的起点 A 在直线 g 上的投影，而终点 B_1 是向量 AB 终点 B 在直线 g 上的投影（如图237）。从平移性质，不难看出，相等的向量具有相等的投影。从而不难证明，向量 a 和 b 之和的投影等于二向量的投影之和。事实上，作向量 AB 等于向量 a，然后作向量 BC 等于向量 b（如图238）。则以 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 分别表示向量 a 和 b 在直线 g 上的投影，可有 $\bar{a}=A_1B_1$，$\bar{b}=b_1c_1$，由此可得

$$\bar{a}+\bar{b}=A_1B_1+B_1C_1=A_1C_1,$$

但A_1C_1是向量$AC=a+b$在直线g上的投影。

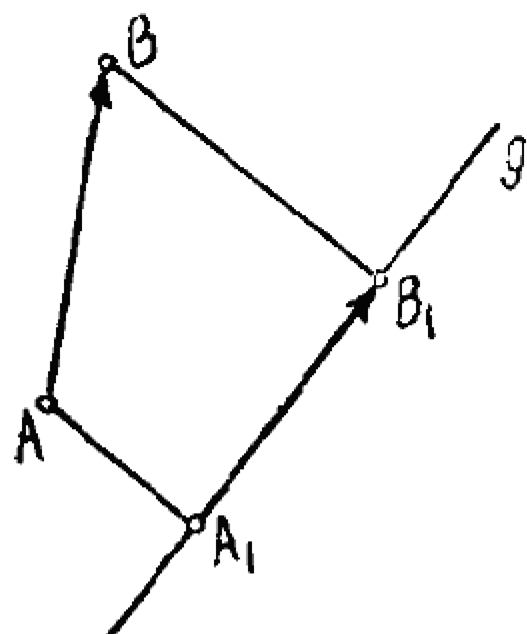


图 237

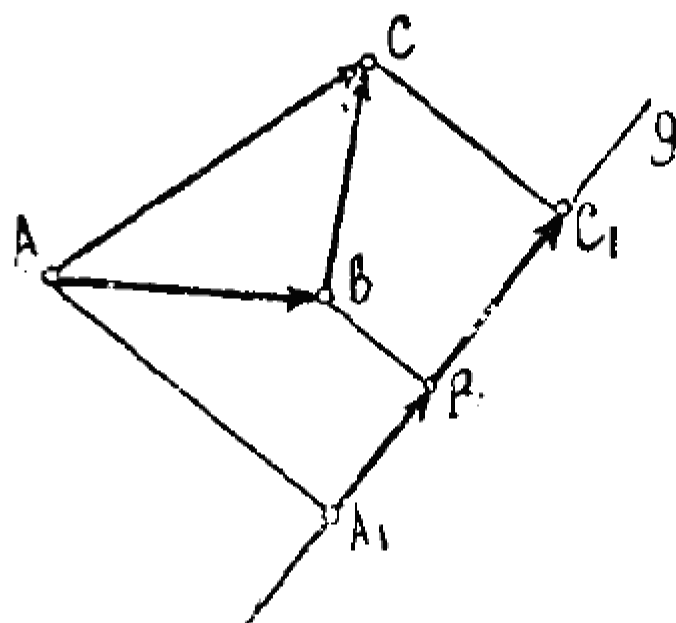


图 238

显然，向量a乘以向量b的数量积等于向量a在包含向量b的直线上的投影$\bar{a}$乘以向量$\bar{b}$的数量积（如图239）。



图 239

因此，要证明数量积的分配律

$$(a+b)c=ac+bc,$$

只须证

$$(\bar{a}+\bar{b})c=\bar{a}c+\bar{b}c,$$

其中$\bar{a}$和$\bar{b}$是向量a和b分别在包含向量c的直线上的投影向量，此等式可直接借助于28.15的性质来验证。特别是，如果三向量$\bar{a}$、$\bar{b}$、c同向，那么，此式左端等于$(|\bar{a}|+|\bar{b}|)|c|$，而右端等于$|\bar{a}||c|+|\bar{b}||c|$，两者显然相等。如果向量$\bar{a}$和$\bar{b}$与向量$c$反向，则两端均为负，绝对值

相等。建议读者自己考虑其它各情况，验证等式成立。

最后，我们借助于向量来证明大家所熟悉的两个定理。设ABC为一个三角形，可有向量等式

$$AB=CB-CA.$$

将这等式左右部分各自进行数量积可有

$$(AB)(AB)=(CB-CA)(CB-CA),$$

应用分配律于右端，可有

$$(AB)(AB)=(CB)(CB)+(CA)(CA)-2(CB)(CA),$$

即 $$|AB|^2=|CB|^2+|CA|^2-2|CB||CA|\cos C.$$

这个等式就是大家所熟悉的三角形的余弦定理.

设$ABCD$为平行四边形（如图240），可有向量等式

$$AB-AD=DB,$$

$$AB+AD=AC,$$

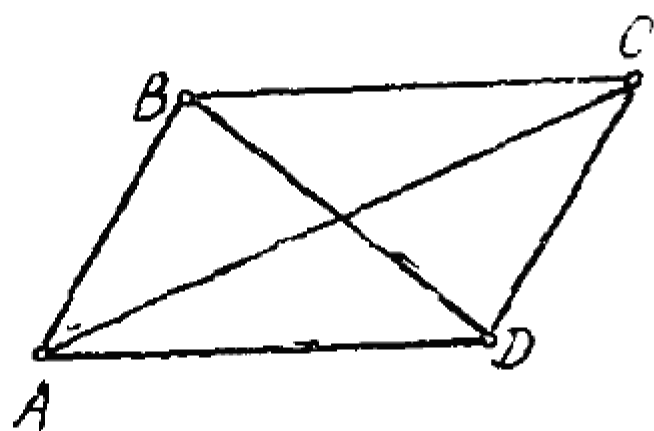


图 240

两等式各自自乘，然后相加，可得

$$2(|AB|^2+|AD|^2)$$
$$=|AC|^2+|BD|^2.$$

这个等式就是大家所熟悉的定理：平行四边形两条对角线平方的和等于各边平方的和。

习　　题

1. 点A_1、A_2、A_3、A_4位于同一条直线上，并且点A_3位于A_1及A_2之间，而点A_4位于A_2和A_3之间。射线A_1A_2、A_1A_3、A_1A_4、A_2A_3、A_2A_4、A_3A_4中哪几条同向？哪几条反向？

2. 向量a'与向量a关于点O对称，求证：向量a'和a反向。

3. 点E及F是平行四边形$ABCD$的对边AD和BC上的点。射线BE、CE、AF、FD中哪几条同向？哪几条反向？

4. 有公共起点的两条射线a和b位于同一条直线上，试证：如果两条射线中某一条包含另一条，那么，两条射线同向；反之，两条射线反向。

5. 证明：对任意两个向量a和b，都有

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

6. 已知ABC是一个三角形，D为它中线的交点。试证向量等式

$$DA+DB+DC=0.$$

7. 已知ABC是一个三角形，D为它的中线交点，O为三角形所在平面上任意一点。试证向量等式

$$OD=\frac{1}{3}(OA+OB+OC).$$

8. 点A_1，A_2，A_3，…，A_n是正n边形的各个顶点，O是正n边形的中心，试证向量之和：

$$OA_1+OA_2+\cdots+OA_n=0.$$

9. 如果由向量a，b，…，d所构成的图形有两条对称轴，试证这些向量之和等于零。

10. 向量a和b均非零向量，且不共线，问数λ何值时，向量$a(\lambda-2)+b$和$a(2\lambda+1)-b$共线？

11. 向量a和b均异于零，且不共线。问数λ及μ何值时，向量$a\lambda+b\mu$和$a(\mu+1)+b(1-\lambda)$相等？

12. $ABCD$是平行四边形，AB和AD为其两条邻边，E是两

条对角线的交点。试用向量AB和AD来表示向量BE和CE。

13．点X位于直线AB上。试证向量OX由向量$a=OA$及$b=OB$ 按公式

$$OX=\lambda a+(1-\lambda)b$$

表示出。式中数λ与点在直线上的分布位置有关。特别是，如果点X位于A和B之间，则

$$0<\lambda<1.$$

14．在三角形ABC的边BC上取点A_1，而在边AC上取点B_1，线段AA_1和BB_1交于点D。如果已知距离比

$$\frac{B_1A}{B_1C}=\lambda,\ \frac{A_1B}{A_1C}=\mu,$$

试求距离比$\frac{AD}{AA_1}$。

15．在三角形ABC的三边上取点：在边BC上取点A_1，在AC上取点B_1，在AB上取点C_1。试证：如果线段A_1B，A_1C，B_1A，…的长度满足关系式

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1,$$

则直线AA_1、BB_1、CC_1必交于一点。

16．设向量a及b均异于零，并且不共线，试证：如果向量c满足

$$ac=0,\ bc=0,$$

那么向量c等于零。

17．试证：任意向量a及b都有不等式

$$(ab)^2-a^2b^2\leqslant 0.$$

18. 设向量 a 和 b 为单位向量，并夹角为60°，试求向量

$$\lambda a+\mu b$$

的模。

19. 试证：如果向量 a 和 b 不等，但它们的模相等，则向量 $a+b$ 与向量 $a-b$ 垂直。

20. 向量e_1和e_2是两个单位向量（模等于1），并且相互垂直。试证：任意向量 c 都可用向量e_1和e_2按公式

$$c=(ce_1)e_1+(ce_2)e_2$$

表示出。

21. 设向量 a 和 b 均异于零，并且不共线，则任意向量 c，有

$$c=\lambda a+\mu b,$$

证明：

$$\lambda=\frac{b^2(ac)-(ab)(bc)}{a^2b^2-(ab)^2},$$

$$\mu=\frac{a^2(bc)-(ab)(ac)}{a^2b^2-(ab)^2}.$$

§29. 三　角

任意角三角函数的定义 在§14中已给出了，当 $0°\leqslant x\leqslant 180°$ 时，三角函数 $\sin x$、$\cos x$、$\operatorname{tg} x$ 的定义。现在我们来确定任意角三角函数的定义，当 x 为任意数时，都有

$$\left.\begin{aligned}\sin(x+180°)=-\sin x\\ \cos(x+180°)=-\cos x\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

如果已知正弦和余弦在 $0°\leqslant x\leqslant 180°$ 时的值，那么这个条件可以单值地确定任意角的正弦和余弦之值。

事实上，根据（1）中第一公式可以确定 x 从0°到180°角的 $\sin x$ 之值，同时也可以确定 x 从180°到360°角的 $\sin x$ 之

值。我们用这个公式，进而还可以确定$360° \leqslant x \leqslant 360°+180°$角的$\sin x$之值等等。$\cos x$的值可借助于（1）中第二公式来确定，只须知道$x$从0°到180°角的$\cos x$之值。函数$\mathrm{tg}x$可由$\sin x$和$\cos x$来确定。即

$$\mathrm{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

29.1 三角函数sinx和cosx是以360°为周期的周期函数，三角函数tgx是以180°为周期的周期函数。

因而，根据（1）中第一式，有

$$\sin(x+360°)=-\sin(x+180°)=\sin x.$$

这公式表明，函数$\sin x$是以360°为周期的周期函数。同理可确定函数$\cos x$的周期性。如果（1）中两式相除，即得

$$\mathrm{tg}(x+180°)=\mathrm{tg}x,$$

即函数$\mathrm{tg}x$是180°为周期的周期函数。

通过从0°到180°角的函数值，可以求出$\sin x$，$\cos x$，$\mathrm{tg}x$的一般表达式。当x为任意数时，有

$$x=180°n+x',$$

其中n为整数，而x'介于0°到180°之间。根据公式（1），函数$\sin x$和$\cos x$的角x可化为小于180°，函数变号。因此，当n为奇数时

$$\sin x=-\sin x', \quad \cos x=-\cos x',$$

而当n为偶数时

$$\sin x=\sin x', \quad \cos x=\cos x'.$$

故当n为任意数时

$$\sin x=(-1)^n\sin x',$$

$$\cos x=(-1)^n\cos x',$$

$$\mathrm{tg}\,x=\mathrm{tg}\,x'.$$

这些公式可以把 x 为任意数的 $\sin x$、$\cos x$、$\operatorname{tg} x$ 的函数值，化为从0°到180°的函数值。

诱导公式 三角函数的诱导公式建立了角为 x、$-x$、$180°\pm x$、$90°\pm x$ 时函数值之间的关系.现在求这些公式。

29.2 对于任何角x，有

$$\sin(180°-x)=\sin x,$$

$$\cos(180°-x)=-\cos x.$$

当 x 为从 0°到 180°角时，在§14中已证明过，这两个公式对任意 x 均成立。

当 x 为任意数时，可以得出

$$x=180°n+x',$$

其中 n 为整数，而$0°\leqslant x'\leqslant 180°$. 在§14中，已证明过

$$\sin(180°-x')=\sin x',$$

$$\cos(180°-x')=-\cos x'.$$

如果上述等式的左端以 x 代替x'，那么，当 n 为偶数时，其值不变；当 n 为奇数时，其值变号. 等式的右端，如果以 x 代替x'，也是如此. 因而，当 x 为任意数时，可有

$$\sin(180°-x)=\sin x,$$

$$\cos(180°-x)=-\cos x.$$

两式相除可得

$$\operatorname{tg}(180°-x)=-\operatorname{tg} x.$$

29.3 函数sinx和tgx是奇函数，而函数cosx是偶函数.

这就是说，当 x 为任意数时，有

$$\sin(-x)=-\sin x,$$

$$\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x,$$

$$\cos(-x)=\cos x.$$

事实上，在公式

$$\sin(180°-x)=\sin x$$

中，两端的角度各加180°可有

$$\sin(360°-x)=\sin(180°+x),$$

但由周期性

$$\sin(360°-x)=\sin(-x),$$

$$\sin(180°+x)=-\sin x,$$

因而，

$$\sin(-x)=-\sin x.$$

同理，借助于 $\cos(180°-x)=-\cos x$ 可以确定，函数 $\cos x$ 是偶函数。函数 $\operatorname{tg}x$ 是奇函数，可由两式

$$\sin(-x)=-\sin x,$$

$$\cos(-x)=\cos x$$

相除得来。

29.4 对于任意 x 值，有

$$\sin(90°-x)=\cos x,$$

$$\cos(90°-x)=\sin x,$$

$$\operatorname{tg}(90°-x)=\frac{1}{\operatorname{tg}x}.$$

当 $0°\leqslant x\leqslant 90°$，上述公式在§14中，已证明过。

现在证明，这些公式对任意 x 均成立。当 x 为任意数时，有

$$x=90°n+x',$$

其中 n 为整数（正、负或 0），而 $0°\leqslant x'\leqslant 90°$. 对角 x' 成立公式

$$\sin(90°-x')=\cos x',$$

$$\cos(90°-x')=\sin x'.$$

如果 n 为偶数，在上述公式内以 x 代替 x'。此时，每一公式的两端或者均保持不变，或者同时变号，因而两端仍然相等。因此，

$$\sin x(90^\circ - x) = \cos x,$$

$$\cos(90^\circ - x) = \sin x.$$

如果 n 为奇数，以 $x + 90^\circ$ 代替 x'，此时等式仍然成立。等式 $\sin(90^\circ - x') = \cos x'$ 变成

$$\sin(-x) = \cos(x + 90^\circ) = -\cos(x - 90^\circ)$$
$$= -\cos(90^\circ - x),$$

由此得出

$$\cos(90^\circ - x) = \sin x. \qquad (2)$$

同理，在公式

$$\cos(90^\circ - x') = \sin x'$$

中，以 $x + 90^\circ$ 代替 x'，可得

$$\sin(90^\circ - x) = \cos x. \qquad (3)$$

（3）除以（2）得

$$\operatorname{tg}(90^\circ - x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

三角函数的加法公式　三角函数的加法公式就是用 x 和 y 的三角函数表示 $x+y$ 和 $x-y$ 的三角函数的公式。

29.5　对于任意 x 和 y，可有

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

首先，就 x 和 y 在 $0^\circ \leqslant x,\ y \leqslant 180^\circ$ 范围内证明这两等式。如果 x 和 y 等于 0° 或等于 180° 时，那么两公式成立。这点可以直接验算。因此可以认为

$$0^\circ < x, \quad y < 180^\circ.$$

取两条相互垂直的直线，它们的交点O将这两条直线各分割成两条射线。在两直线上各标出一条射线：a_1和a_2（如图241）。以射线a_1为一边，在射线a_2所在的半平面上作角(a_1a)等于x（$0<x<180°$）。在射线a_1、a_2、a上截取单位向量e_1、e_2、e，有向量等式

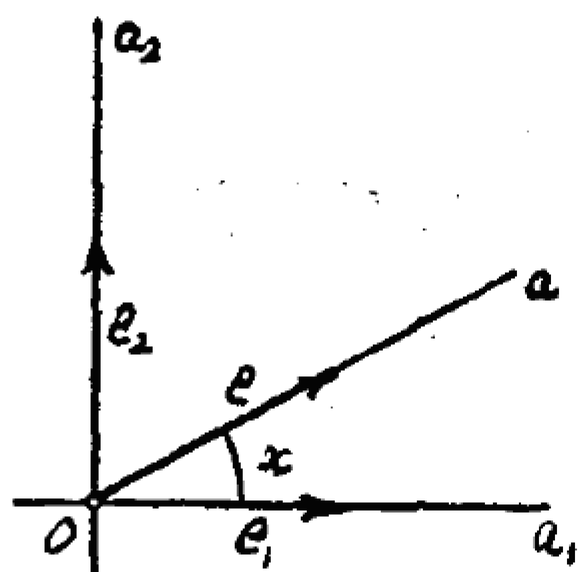


图 241

$$e=e_1\lambda+e_2\mu.$$

我们求λ和μ。以向量e_1数性地遍乘这个向量等式，并注意$e_1^2=1$，$e_1e_2=0$，$ee_1=\cos x$，可得 $\lambda=\cos x$。以向量e_2数性地遍乘这个等式，可得

$$\mu=\cos(\widehat{aa_2}).$$

令

$$角(\widehat{aa_2})=\begin{cases}90°-x, & 在\ x\leqslant 90°时,\\ x-90°, & 在\ x>90°时.\end{cases}$$

在这两种情况下，$\cos(\widehat{aa_2})=\sin x$。所以

$$e=e_1\cos x+e_2\sin x.$$

以射线a_1为一边，在射线a_2所在半平面上作角(a_1a')等于 y（$0<y<180°$），并在这角的边a'上截取单位向量e'。有

$$e'=e_1\cos y+e_2\sin y.$$

将这两向量等式数性地乘起来，可得

$$\cos(\widehat{aa'})=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$$

令

$$角(\widehat{aa'})=\begin{cases}x-y, & 在x\geqslant y时,\\ y-x, & 在x<y时.\end{cases}$$

在这两种情况下，均有$\cos(\widehat{aa'})=\cos(x-y)$。
由此可以得出

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y。$$

现在证明这公式对于任意x和y均成立。我们有

$$x=180°m+x', \qquad y=180°n+y',$$

其中m和n均为整数，而x'和y'介于0°及180°之间。按已证公式，可得出

$$\cos(x'-y')=\cos x'\cos y'+\sin x'\sin y'。$$

在这等式的左端，把x'和y'分别换为x和y，此时，如果$m-n$为偶数，则左端之值不变，而当$m-n$为奇数时，左端之值变号。在等式的右端把x'和y'分别换为x和y，当$m+n$为偶数时，右端不变。而当$m+n$为奇数时，右端变号。注意$m-n$和$m+n$或同时都是偶数、或同时都是奇数。因而，可以得出：当x和y代替x'和y'时，等式仍然成立。故29.5中第一式对于任意x和y均成立。

因为第一式对于任意x和y均成立，故换y为$-y$，这第一式仍成立。因此，可得

$$\cos[x-(-y)]=\cos x\cos(-y)+\sin x\sin(-y)。$$

注意$\cos x$是偶函数，$\sin x$是奇函数，可得

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y。$$

因而29.5的第二公式得证。

29.6 对于任意x和y，有

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y,$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y.$$

证明 公式29.5对于任意x和y均成立。在29.5的二公式中，换x为$x-90°$，可得

$$\cos(x+y-90°)=\cos(x-90°)\cos y-\sin(x-90°)\sin y,$$

$$\cos(x-y-90°)=\cos(x-90°)\cos y+\sin(x-90°)\sin y,$$

即

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y,$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y.$$

29.7　有如下公式

$$\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y}{1-\mathrm{tg}x\mathrm{tg}y},$$

$$\mathrm{tg}(x-y)=\frac{\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}y}{1+\mathrm{tg}x\mathrm{tg}y}.$$

这两公式可由29.6中的两式分别除以29.5中两式得出。即

$$\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}.$$

以$\cos x\cos y$除等式右端的分子和分母，即得29.9的第一式

$$\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y}{1-\mathrm{tg}x\mathrm{tg}y}.$$

第二公式可由类似的方法得出。

二倍角及半角的三角函数公式　在$\sin(x+y)$，$\cos(x+y)$，$\mathrm{tg}(x+y)$的公式中，如$y=x$，则可得下列二倍角三角函数的公式：

29.8　$\sin 2x=2\sin x\cos x,$

$$\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x,$$

$$\mathrm{tg}2x=\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}.$$

因 $\sin^2x+\cos^2x=1$，所以第二公式又可写成下面两个公式：

$$\cos 2x=2\cos^2x-1,$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x.$$

如果在这两公式中把 x 换为$\frac{x}{2}$，并解出$\cos\frac{x}{2}$ 和$\sin\frac{x}{2}$，则可得半角三角函数公式：

29.9 $$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}},$$

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}.$$

用$\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ 表$\sin x$和$\cos x$的公式如下：

29.10 $$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

实际上，

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}},$$

如果等式右端的分子和分母同除以$\cos^2\frac{x}{2}$，则可得到

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

同理可得第二公式。

三角函数的积化和差及和差化积公式

29.11 对任意 x 和 y，有

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)],$$

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)],$$

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)].$$

事实上，由29.5，可有

$$\cos x\cos y+\sin x\sin y=\cos(x-y),$$

$$\cos x\cos y-\sin x\sin y=\cos(x+y).$$

将上面两个等式的两端分别相加或相减，可得

$$2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y),$$

$$-2\sin x\sin y=\cos(x+y)-\cos(x-y).$$

这两个等式的两端分别除以 2，可得

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)],$$

$$\sin x\sin y=-\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)].$$

注意第二个等式右端前面的系数是$-\frac{1}{2}$．这个等式还可以写成另一种形式

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)].$$

按照同样方法，利用29.6的公式，可得出 29.11 中第三个公式．

29.12 对于任意 α 和 β，可有

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

事实上，公式 29.11 对于任意 x 和 y 均成立。在第一式中，代

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2},\qquad y=\frac{\alpha-\beta}{2},$$

可得

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta),$$

由此，可得

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

再把

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2},\qquad y=\frac{\beta-\alpha}{2}$$

代入29.11的第二公式，即得29.12的第二式。代

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2},\qquad y=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

于29.11的第三式，可得29.12的第三式。最后代

$$x=\frac{\alpha-\beta}{2},\qquad y=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

于29.11的第三式，即得29.12的第四式。

正切和差的变换公式如下：

29.13 $$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

事实上，

$$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

同理可以得出第二个公式。

解三角形 在§14中大家都知道，已知一个三角形的三个要素，利用正弦定理和余弦定理就可求出三角形的其它各个要素（各边与各角）。现在我们再指出一些解这类问题所需用的新公式。

29.14 对任意一个三角形，有

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

公式中 a、b、c 为这三角形的三条边，p 为这三角形周长的$\frac{1}{2}$，即 $p=\frac{a+b+c}{2}$，A 为这三角形 a 边所对的角。

证明 根据余弦定理，我们可以得出

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

由此，

$$a^2=(b-c)^2+2bc(1-\cos A),$$
$$a^2-(b-c)^2=2bc(1-\cos A),$$
$$(a+b-c)(a+c-b)=4bc\sin^2\frac{A}{2}.$$

注意 $a+b-c=2(p-c)$，$a+c-b=2(p-b)$，
即得

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

按照同样方法，我们可以得到 29.14 中的第一个公式。这里须从下面等式开始，

$$a^2=(b+c)^2-2bc(1+\cos A).$$

29.15 任意三角形的面积公式为

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A,$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \text{（海伦公式）}$$

事实上，在第一个公式中，$b\sin A$ 是三角形c边上的高h_c，而三角形的面积为 $S=\frac{ch_c}{2}$，第二个公式可由第一个公式得出，有

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

把29.14公式中的 $\sin\frac{A}{2}$ 和 $\cos\frac{A}{2}$ 的值，代入上面的公式内，即可得出29.15中的第二个公式。

29.16 三角形的外接圆半径的公式为

$$R=\frac{a}{2\sin A}, \qquad R=\frac{abc}{4S}.$$

公式中 a、b、c 是这三角形的三条边，A 为 a 边所对的角，S 为三角形的面积。

根据§14中的正弦定理，可以得出上面的第一个公式。第二个公式可由第一个公式推导得出。事实上，

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{2bc\sin A}=\frac{abc}{4S}.$$

29.17 三角形的内切圆半径的公式为

$$\mathbf{r}=\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{p}},$$

公式中 p 为三角形周长的 $\frac{1}{2}$，S 为三角形的面积。

事实上，设 A、B、C 是三角形的三个顶点，O 为内切圆的圆心。三角形 ABC 可分成为三个三角形：$\triangle OAB$、$\triangle OBC$ 和 $\triangle OCA$。它们的面积之和等于 S。它们的面积分别为

$$\frac{ar}{2},\quad \frac{br}{2},\quad \frac{cr}{2},$$

其中 r 为内切圆的半径。由此可得出

$$S=\frac{a+b+c}{2}r=pr.$$

于是

$$r=\frac{S}{p}.$$

习　题

1．在0°到360°范围内，什么样的角 x 使

a) $\sin x>0$； b) $\sin x<0$， c) $\sin x=0$？

2．求下列角度的各三角函数值：845°、930°、3660°。

3．角120°、135°、150°的各三角函数值等于多少？

4．从0°到360°中，哪些角满足下列等式：a) $\sin x=\cos x$；b) $\sin x=-\cos x$？

5．用$\sin\alpha$和$\cos\alpha$表明三角函数$\sin(270°\pm\alpha)$和$\cos(270°\pm\alpha)$的值。

6．用$\sin\alpha$和$\cos\alpha$表明三角函数$\sin(990°+\alpha)$和$\cos(990°+\alpha)$的值。

7．$\mathrm{tg}x=-1$，而$\cos x>0$，求角x（$0°\leqslant x\leqslant 360°$）的值。

8．$\sin x=0.5$，而$\cos x>0$，求所有角。

9．查三角函数表，求值：$\sin 20°20'30''$及$\cos 30°30'30''$。另外已知$\mathrm{tg}x=30$，求锐角x。

10．如果角x和y都是锐角，并且$x>y$，求证：$\sin x>\sin y$，$\cos x<\cos y$。

11．不查三角函数表，求下列三角函数值：$\sin 15°$，$\cos 15°$，$\mathrm{tg}15°$。

12．试证明：

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x,$$

$$\cos 3x=-3\cos x+4\cos^3 x.$$

13．证明：对同一个三角形的各角成立恒等式

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C=\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B\,\mathrm{tg}C.$$

14．试利用三角形的正弦定理证明：

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}, \qquad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

15．试利用正弦定理证明：

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}\text{（正切定理）}.$$

16．证明：三角形的内切圆半径公式

$$r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2},$$

式中 p 为三角形周长的 $\frac{1}{2}$，A 为三角形的边 a 所对的角。

§30．坐 标 法

平面直角坐标系 在平面内，作两条互相垂直的直线 OX 和 OY，即**坐标轴**（如图242），两轴的交点 O 叫**坐标原点**。原点 O 将每条坐标轴分成两个**半轴**，称其中一个半轴为**正半轴**，另一个半轴为**负半轴**。以原点 O 为起点在两个正半轴上各取单位向量：在半轴 OX 上取 e_1，在半轴 OY 上取 e_2。

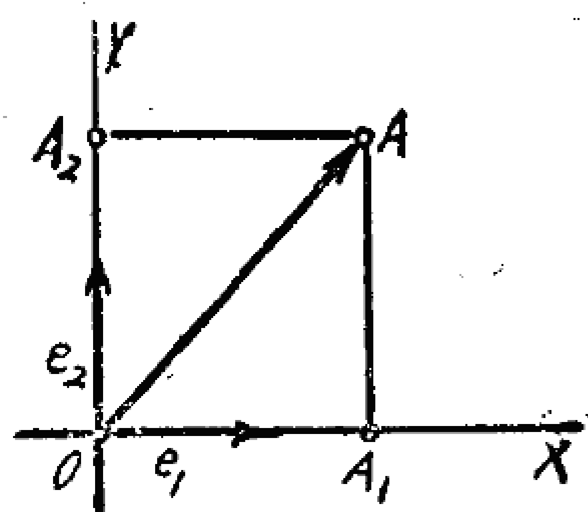


图 242

设 A 为平面上任意一点，向量 OA 可用基础向量 e_1 和 e_2 唯一地表示为

$$OA = xe_1 + ye_2,$$

数 x 和 y 叫做 A 点的**直角迪卡儿坐标**，x 叫 A 点的**横坐标**，y 叫 A 点的**纵坐标**。

A 点的坐标 x 和 y 可用简单的几何作图求作。过 A 点作直线平行于**纵坐标轴** OY（如图242），这条直线交**横坐标轴** OX 于某点 A_1。点 A 的横坐标 x 是这样一个数：它的绝对值等于线段 OA_1 的长度，并且当 A_1 位于正半轴时，x 为正，而当 A_1 位于负半轴时，x 为负。如果点 A_1 重合于 O，则横坐标 x 等于0。同样可确定 A 点的纵坐标 y。A 点的横、纵坐标，记作为 $A(x, y)$ 或（x，y）。应当注意：在括号内，横坐标总写在前面，而纵坐标写在后面。

在直角坐标系中，坐标轴把平面分成四个直角即四个**象限**——Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ（如图243）。在各象限内，点的坐标符号如图243所示。

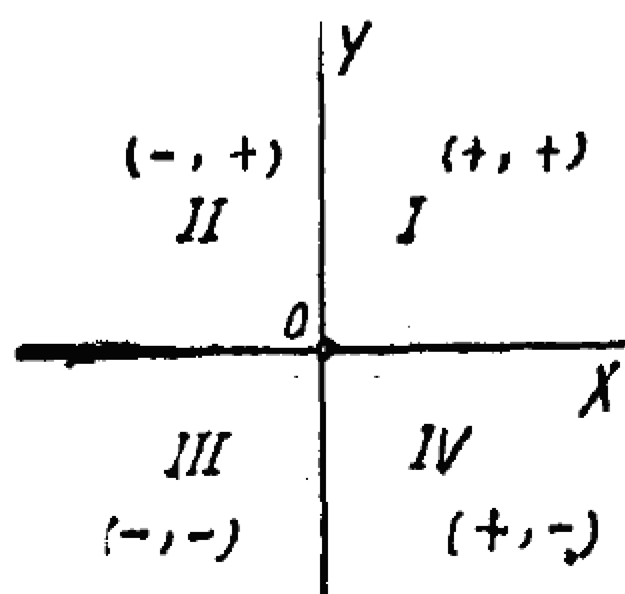


图 243

x 轴（横坐标轴）上点的纵坐标等于零，而 y 轴（纵坐标轴）上点的横坐标等于零。原点的横坐标及纵坐标均为零。

坐标轴 x 和 y 所在平面称 xy 面，这个平面上任意一个以 x 和 y 为坐标的点，有时简单地记作（x，y）。

坐标 x 和 y 也叫迪卡儿坐标，这是用法国著名数学家迪卡儿（1596—1650）的名子来命名的。

设在 xy 面上有两个已知点 $A_1(x_1, y_1)$ 和 $A_2(x_2, y_2)$。我们用 A_1 和 A_2 两点的坐标表出这两点的距离。

点A_1和A_2之间距离等于向量A_1A_2的模。向量A_1A_2等于向量OA_2与向量OA_1之差

$$A_1A_2=OA_2-OA_1.$$

但

$$OA_1=x_1e_1+y_1e_2,\quad OA_2=x_2e_1+y_2e_2,$$

故

$$A_1A_2=(x_2-x_1)e_1+(y_2-y_1)e_2.$$

将此式进行数性自乘，并注意$e_1^2=e_2^2=1$，$e_1e_2=0$，可得

$$(A_1A_2)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

这个等式的左端等于A_1与A_2距离的平方，因而，可得：

30.1 两点(x_1, y_1)和(x_2, y_2)之间的距离公式为

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

从几何观点看，这公式是勾股定理应用于直角三角形A_1A_2A（如图244）。

设$A_1(x_1, y_1)$和$A_2(x_2, y_2)$为xy面上两个已知点。试求：把线段A_1A_2分成$m_1:m_2$的点A的坐标x和y（如图245）。解这题可利用集中于点A_1和A_2的两个质量m_1和m_2的重心定义。

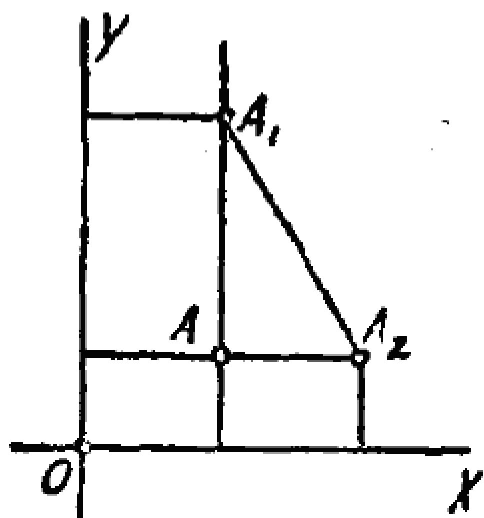


图 244

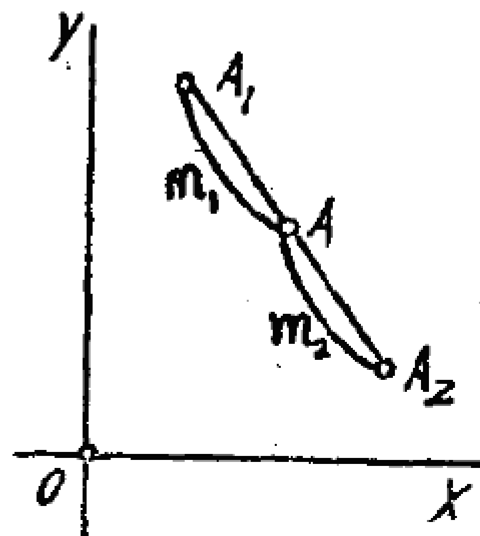


图 245

向量 AA_1和向量 AA_2反向，而它们的模之比等于 m_1和 m_2 之比。故有向量等式

$$\frac{AA_1}{m_1}+\frac{AA_2}{m_2}=0,$$

然而，

$$AA_1=(x_1-x)e_1+(y_1-y)e_2,$$
$$AA_2=(x_2-x)e_1+(y_2-y)e_2,$$

因此可得

$$\frac{(x_1-x)}{m_1}e_1+\frac{(y_1-y)}{m_1}e_2+\frac{(x_2-x)}{m_2}e_1+\frac{(y_2-y)}{m_2}e_2=0,$$

由此向量等式可得出

$$\frac{x_1-x}{m_1}+\frac{x_2-x}{m_2}=0,\quad \frac{y_1-y}{m_1}+\frac{y_2-y}{m_2}=0.$$

自这方程组解出 x 和 y 即得点 A 的坐标

$$x=\frac{m_2x_1+m_1x_2}{m_1+m_2},\qquad y=\frac{m_2y_1+m_1y_2}{m_1+m_2}.$$

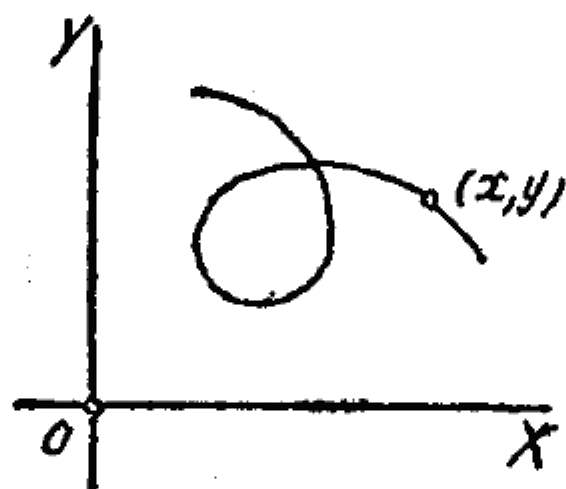


图 246

圆的方程 设在平面上给了某条曲线 γ（如图246）。方程 $f(x,y)=0$ 叫做**曲线 γ 的方程**，指的是：曲线 γ 上任意一点的坐标 x，y 都满足这个方程，并且满足这方程 $f(x,y)=0$ 的任意一点的坐标 x，y 必在曲线 γ 上。因此平面上的一条曲线可以完全由它的方程所确定，也可以说一条曲线由它的方程给出。

在几何上，常常会遇到以下两类题：①根据曲线给定的几何性质来建立曲线方程。②根据曲线给定的方程来求曲线

的几何性质（即画出它的图形）。

现在我们研究大家所熟悉的曲线——圆。

设 $A_0(x_0, y_0)$ 是平面 xy 上任意一点，并且 R 是任意一个正数。试建立以 A_0 为圆心，以 R 为半径的圆的方程（如图247）。在圆周上取任意一点 $A(x, y)$，此点到圆心 A_0 的距离等于 R。根据30.1，点 A 到 A_0 距离的平方等于

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2.$$

因此，圆周上每一点 A 的坐标 (x, y) 必满足方程

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-R^2=0. \qquad (1)$$

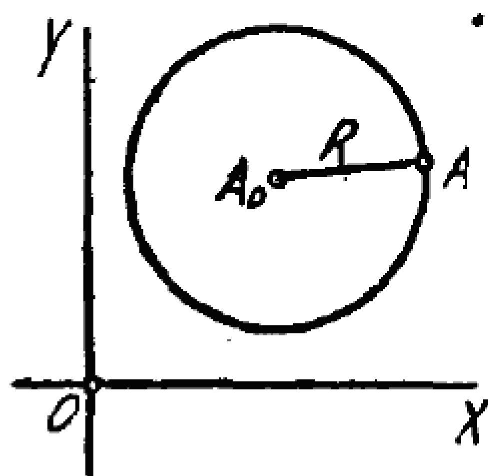


图 247

反之，满足方程①的任意点 A 的坐标 (x, y) 必在这个圆周上，因为这些点 A 与圆心 A_0 的距离等于 R，因此，根据上述定义，**方程（1）是以点 $A_0(x_0, y_0)$ 为圆心，并且以R为半径的圆的方程。**

现在我们研究曲线的第二类题，已知方程

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0$$
$$(a^2+b^2-c>0),$$

求曲线的几何性质。这个方程可写成如下的等价形式：

$$(x+a)^2+(y+b)^2-R^2=0,$$
$$R=\sqrt{a^2+b^2-c}.$$

由此方程可见：曲线上每一点 (x, y) 到点 $(-a, -b)$ 的距离均等于 R，因此**这条曲线是一个圆心在（$-a$，$-b$）上、半径为 $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$ 的圆。**

举几个应用迪卡儿坐标解题和证明定理的例子。

例题　动点到两定点 A_1 和 A_2 的距离之比等于 $c\neq1$，试

求动点的几何轨迹。

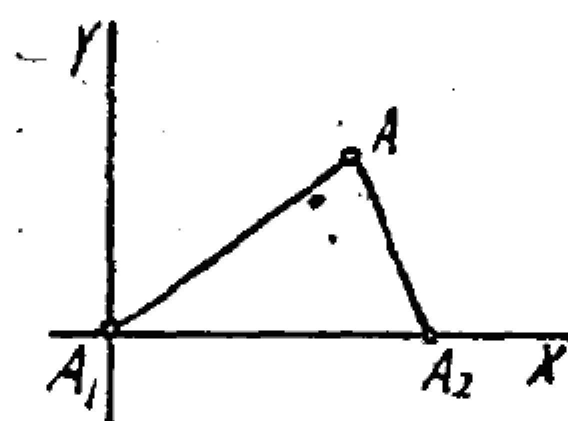


图 248

采用迪卡儿坐标：取点A_1为坐标原点，并取射线A_1A_2为x轴的正半轴（如图248）在直角坐标系中，点A_1的坐标为(0,0)，而点A_2的坐标为$(a, 0)$，其中a为点A_1和A_2的距离，设$A(x, y)$为所求轨迹上的任意一点，点A到点A_1和A_2距离的平方为

$$x^2+y^2, \quad (x-a)^2+y^2.$$

所求的几何轨迹方程为

$$\frac{x^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}=c^2,$$

经过变换，这个方程可化成

$$x^2+y^2-\frac{2ac^2}{c^2-1}x+\frac{a^2c^2}{c^2-1}=0.$$

因此，**所求的轨迹是一个圆心在x轴上，即在直线A_1A_2上，半径为$\frac{ac}{|c^2-1|}$的圆。**

例题　动点到已知两点A_1和A_2距离的平方和等于常数$c^2\left(c^2\geqslant\frac{|A_1A_2|^2}{2}\right)$，试求动点的轨迹。

在直角坐标系中，各点所取的位置如上题，所求动点的轨迹方程为

$$x^2+y^2+(x-a)^2+y^2=c^2,$$

即

$$x^2+y^2-ax+\frac{a^2-c^2}{2}=0.$$

因此**所求轨迹是一个圆心在$(\frac{a}{2}, 0)$，即线段A_1A_2的中点，半径为$\frac{1}{2}\sqrt{2c^2-a^2}$的圆。**

在 §13我们研究了两圆相交取决于它们的半径 R_1和 R_2 及圆心距 d，应用坐标解这类题是比较简单的，现在我们来解这类题。

已知 A_1和 A_2 是两圆的中心，与上两题一样，取迪卡儿直角坐标 x 和 y，两圆方程为

$$x^2+y^2=R_1^2,$$
$$(x-d)^2+y^2=R_2^2.$$

现在研究这个方程组：如果两个圆相交，则方程组有解，解就是这两个圆交点的坐标，原因是这个解同时满足第一个方程和第二个方程。如果两个圆不相交，则方程组没有解。如果两个圆相交，那么交点的数目等于方程组的解的数目。因此，两圆相交的问题归结为方程组是否有解和有多少组解的问题。

两个方程相减，可有

$$2dx-d^2=R_1^2-R_2^2,$$

由此可得

$$x=\frac{d^2+R_1^2-R_2^2}{2d}.$$

把 x 值代入第一方程，可得

$$y_{1,2}=\pm\sqrt{R_1^2-(\frac{d^2+R_1^2-R_2^2}{2d})^2}.$$

因为这里所谈的是方程组的实解，所以要方程组有解，必须

满足下面条件：

$$\Delta = R_1^2 - \left(\frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2}{2d}\right)^2 \geqslant 0$$

并且在 $\Delta > 0$ 时，有两组解；而在 $\Delta = 0$ 时，只有一组解。如果不等式反向，即 $\Delta < 0$ 时，那么方程组没有实解，即两圆不相交。

上述的两圆相交的条件在形式上与定理13.6所给的条件不同。但是，不难看出这些条件是一致的。因为

$$\Delta = \frac{1}{4d^2}[R_2^2 - (R_1 - d)^2][(d + R_1)^2 - R_2^2].$$

设 $R_1 \geqslant R_2$，则Δ的符号只依赖于 $R_2 - |R_1 - d|$，因此当 $R_2 > |R_1 - d|$ 时，两圆相交于两点；当 $R_2 < |R_1 - d|$ 时，两圆不相交；当 $R_2 = |R_1 - d|$ 时，两圆相交于一点，即两圆相切。

直线方程　建立 xy 面上任意一条直线的方程。设 $A_0(x_0, y_0)$为直线上某一点，而且

$$n = ae_1 + be_2$$

为垂直于直线的一个向量（如图249）。在直线上取任意一点$A(x, y)$，则

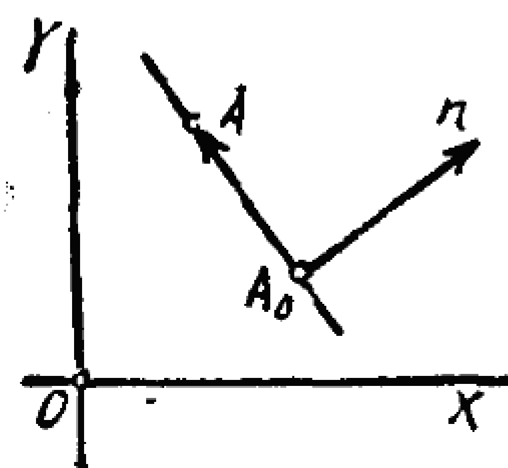


图　249

$$A_0A = OA - OA_0$$
$$= (x - x_0)e_1 + (y - y_0)e_2.$$

注意$(A_0A)n = 0$，可得直线方程

$$(x - x_0)a + (y - y_0)b = 0,$$

即

$$ax + by + c = 0,\quad c = -(ax_0 + by_0).$$

因此任意一条直线都有一个一次方程或线性方程。

现在我们证明：**任意一个线性方程必是某一直线的方程。**

设
$$ax+by+c=0$$
是已知的线性方程。取这个方程的某组解x_0，y_0，例如：当$a\neq 0$时，可取y_0为任意数，然后由方程解出x_0。如果$b\neq 0$，x_0可任意取，而y_0由方程解得。两系数a和b不能都等于零，原因是，如果它们均为零，那么$c=0$，我们就没有方程，而是一个恒等式。

这时我们有
$$ax_0+by_0+c=0,$$
借助于这个等式，原给方程可写成如下形式：
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0.$$
这表明向量
$$n=ae_1+be_2$$
与向量
$$(x-x_0)e_1+(y-y_0)e_2$$
互相垂直。这后一向量是两向量OA和OA_0之差，而A_0是以(x_0, y_0)为坐标的点，A是以(x, y)为坐标的点。因此，所有满足已知方程的(x, y)所代表的点必位于过A_0点，且和向量n垂直的直线上。结论得证。

如果在直线方程
$$ax+by+c=0$$
中有$a^2+b^2=1$，则称这类直线方程为法线方程。方程左端$ax+by+c$有简单的几何意义。如果在这式中以直线外一点$A(x, y)$的坐标代入之，那末所得**数的绝对值等于点A到直线的距离。**

事实上，如上所述，直线方程可写成
$$(x-x_0)a+(y-y_0)b=0$$

或 $(A_0A)n=0$，

其中A_0是直线上以(x_0, y_0)为坐标的点，而向量

$$n=ae_1+be_2。$$

因为$a^2+b^2=1$，所以$n^2=1$，即n为垂直于直线的单位向量（如图250）。对于直线外的任意一点$A(x, y)$，数

$$(A_0A)n=(x-x_0)a+(y-y_0)b$$
$$=ax+by+c$$

的绝对值是线段A_0A在直线的垂直线上的投影，即点A到直线的距离。结论得证。

图 250

下面我们就直线方程

$$ax+by+c=0$$

的某些特殊形式来看直线对坐标轴的相关位置。

1. $a=0$，此时直线方程可写成

$$y=-\frac{c}{b}。$$

因此，直线上的所有点具有相同的纵坐标$-\frac{c}{b}$，可见**直线必平行于x轴。特别是，如果c=0，那么，直线重合于x轴。**

2. $b=0$，同理，**直线平行于y轴。而当c=0时，直线重合于y轴。**

3. $c=0$，**直线经过原点**。因为，当$c=0$时，原点坐标(0, 0)永远满足直线方程。

设直线方程的三个系数都不等于零（直线不经过原点，不平行于x轴，也不平行于y轴）则直线方程乘以$\frac{1}{c}$，并令

$$-\frac{c}{a}=\alpha,-\frac{c}{b}=\beta,$$

则可将直线方程化成

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1.$$

这种形式的直线方程的系数具有简单的几何意义：**不计符号，α及β等于直线截两坐标轴所得线段之长。** α 和 β 是 x 和 y 轴的截距。我们称这类方程为直线的**截距式方程。**

事实上，x 轴（$y=0$）交直线于点$(\alpha, 0)$，而 y 轴（$x=0$）交直线于点$(0, \beta)$。

如果在方程 $ax+by+c=0$ 中系数 $b\neq 0$，则可从方程中解出 y，从而把方程写成

$$y=kx+l,$$

这个方程中，系数 k 和 l 具有简单的几何意义。**系数 l 是已知直线在 y 轴的截距，而系数 k，是直线对 x 轴的倾角的正切**（或称**直线的斜率**）。这类方程称为**截斜式方程。**

直线方程解法的例题　求过点 $A_1(x_1, y_1)$ 的任意直线方程。

设

$$ax+by+c=0$$

为所要求的方程，因为直线经过 $A_1(x_1, y_1)$，所以得出

$$ax_1+by_1+c=0$$

由此解出 c，并代入直线方程中，可得

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0.$$

这就是过已知点 $A_1(x_1, y_1)$ 的直线的一般方程，点 A_1 的坐标 (x_1, y_1) 永远满足这个方程。

求过已知两点 $A_1(x_1, y_1)$ 及 $A_2(x_2, y_2)$ 的直线方程。

因为直线过A_1，所以直线方程可写成如下形式：

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0.$$

又因直线过点$A_2(x_2, y_2)$，故

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=0$$

由此可得

$$\frac{a}{b}=-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

并且所要求的方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}-\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=0.$$

求以$A_1(x_1, y_1)$，$A_2(x_2, y_2)$，$A_3(x_3, y_3)$为顶点的三角形的面积。

上述过A_1和A_2两点的直线的方程可写成

$$(x-x_1)(y_2-y_1)-(y-y_1)(x_2-x_1)=0,$$

将这方程除以

$$d=\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2},$$

可得法线方程。如果以顶点$A_3(x_3, y_3)$的坐标代这个法线方程左端的x和y，所得的绝对值就是由点A_3到直线A_1A_2的垂直距离，即为三角形自顶点A_3到对边A_1A_2之高h，因此

$$h=\frac{|(x_3-x_1)(y_2-y_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_1)|}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_1-x_2)^2}},$$

但三角形的底边A_1A_2等于d，故三角形$A_1A_2A_3$的面积为

$$S=\frac{1}{2}|(x_3-x_1)(y_2-y_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_1)|.$$

设已知两条不同直线的方程

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0.$$

试求两条直线平行的条件，并求两条直线垂直的条件。

我们知道向量 $n_1=a_1e_1+b_1e_2$ 垂直于第一条直线，而向量 $n_2=a_2e_1+b_2e_2$ 垂直于第二条直线。若两条直线垂直，则两向量 n_1 和 n_2 垂直，从而它们的数积为 0，即

$$a_1a_2+b_1b_2=0.$$

反之，如果这条件成立，那么向量 n_1 和 n_2 垂直，从而两条直线垂直。

如果两条直线平行，那么两向量 n_1 和 n_2 应共线，故

$$a_1e_1+b_1e_2=\lambda(a_2e_1+b_2e_2),$$

由此可得

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}.$$

反之，如果后一条件成立，那么向量 n_1 和 n_2 共线，从而两条直线平行。

总之，**两条直线平行的条件为**

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2},$$

两条直线垂直的条件为

$$a_1a_2+b_1b_2=0.$$

求过点 $A_1(x_1, y_1)$ 并与直线

$$ax+by+c=0$$

平行的直线方程。

不管什么数 $\lambda\neq c$，直线

$$ax+by+\lambda=0$$

总与所给直线平行，取 λ 使这个方程在 $x=x_1, y=y_1$ 时满足：

$$ax_1+by_1+\lambda=0,$$

由此可得

$$\lambda=-ax_1-by_1.$$

所求的方程为

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0.$$

求过点$A_1(x_1,\ y_1)$并垂直于直线

$$ax+by+c=0$$

的直线方程。

对于任意λ，直线

$$bx-ay+\lambda=0$$

垂直于所给直线，取λ使这个方程在$x=x_1$，$y=y_1$时，就得所求的方程

$$b(x-x_1)-a(y-y_1)=0.$$

运动方程 按运动的定义，运动是平面自身保存距离的相互单值映象。在平面上引用迪卡儿坐标x,y。设$A(x,y)$是平面上任意一点，且$A'(x',y')$是经过运动后的对应点。我们来求用A点的坐标x，y来表示A'点的坐标x'，y'的公式。这些公式叫运动公式。

我们从最简单的运动——**关于直线的对称**开始，引用坐标x、y，并取y轴为对称轴，按对称的定义，直线AA'垂直于对称轴（y轴），故AA'平行于x轴(或重合于x轴)，可见点A和A'有相等的纵坐标，即$y'=y$。又点A和A'位于对称轴的两侧并与对称轴等距，故x'和x的绝对值相等，符号相反，即$x'=-x$。因此**关于y轴对称**时

$$x'=-x,\ y'=y.$$

现在研究**关于点的对称**。取坐标原点O为对称中心，根据点对称的定义，O为对称中心，射线OA和射线OA'是相补的，并且线段OA等于线段OA'。因此，向量OA和向量

OA'互为反向量，有

$$OA=xe_1+ye_2,\ OA'=x'e_1+y'e_2.$$

因为向量OA与向量OA'互为反向量，故

$$x'=-x,\quad y'=-y.$$

再研究**平移**。设经过平移，坐标原点O变为点$O'(a,b)$。根据平移的定义，向量OO'和向量AA'是共线的，并且它们的模相等。设点A不在直线OO'上，在这种情况下，图形$OO'A'A$为平行四边形（28.3），故向量OO'和向量AA'同向，因而必相等

$$(x'-x)e_1+(y'-y)e_2=ae_1+be_2.$$

由此可得

$$x'-x=a,\ y'-y=b,$$

或
$$x'=x+a,\ y'=y+b. \qquad (2)$$

如果点A位于直线OO'上，则在OO'外取一点A_1，$A_1A_1'A'A$为平行四边形，故向量A_1A_1'等于向量AA'。又因向量OO'等于向量A_1A_1'，故向量OO'等于向量AA'。由此得到公式（2）。总之，**如果经过平移，坐标原点O变为点(a, b)，则运动方程由下列公式给出**

$$\mathbf{x}'=\mathbf{x}+\mathbf{a},\quad \mathbf{y}'=\mathbf{y}+\mathbf{b}.$$

最后，我们研究**绕坐标原点的转动**。经过转动，坐标向量e_1及e_2变为向量e_1'及e_2'。因为转动保存距离和角，故向量e_1'和e_2'均为单位向量，并且互相垂直。向量e_1'和e_2'可用向量e_1和e_2表示为

$$e_1'=\alpha e_1+\beta e_2,\quad e_2'=\gamma e_1+\delta e_2.$$

因为向量e_1'是单位向量，故$\alpha^2+\beta^2=1$。因此，α和β可表示如下：

$$\alpha=\cos\varphi,\ \beta=\sin\varphi.$$

其中 φ 是某一个角。由于经过转动，e_1 和 e_1' 的夹角等于 e_2 和 e_2' 的夹角，故

$$e_1'e_1=e_2'e_2,$$

即 $$\delta=\alpha=\cos\varphi.$$

由此可见，角 φ 具有简单的几何意义，即 e_1 和 e_1' 的夹角（转角）。因为，向量 e_1' 和向量 e_2' 垂直，故

$$e_1'e_2'=\alpha\gamma+\beta\delta=0,$$

即 $$\gamma\cos\varphi+\sin\varphi\cos\varphi=0,$$

由此可得 $$\gamma=-\sin\varphi.$$

总之，

$$e_1'=\cos\varphi e_1+\sin\varphi e_2,$$

$$e_2'=-\sin\varphi e_1+\cos\varphi e_2.$$

现在设经过转动，点$A(x, y)$变为点$A'(x', y')$。有

$$OA=xe_1+ye_2,$$

$$OA'=\lambda e_1'+\mu e_2'.$$

因为转动与任意运动一样，总保存射线间的夹角，故向量OA'与向量 e_1' 和 e_2' 之夹角分别等于向量OA与向量 e_1 和 e_2 之夹角。故 $(OA)e_1=(OA')e_1'$，即 $\lambda=x$，同理 $\mu=y$ 于是

$$OA'=xe_1'+ye_2'.$$

以 $e_1'=\cos\varphi e_1+\sin\varphi e_2$，$e_2'=-\sin\varphi e_1+\cos\varphi e_2$ 代入上式，可得

$$OA'=(x\cos\varphi-y\sin\varphi)e_1+(x\sin\varphi+y\cos\varphi)e_2.$$

又因 $OA'=x'e_1+y'e_2$，故

$$x'=x\cos\varphi-y\sin\varphi,$$

$$y'=x\sin\varphi+y\cos\varphi.$$

这就是转动时的运动方程。

空间向量及空间坐标 空间向量和平面向量一样指的是方向线段。它们可借助于平移来确定向量相等的概念，并证明相等传递性的性质。和平面向量一样，我们能确定空间向量的模和方向，可以证明具有等模同向的向量相等。和平面向量一样，我们能给空间向量的加法下定义，并证明结合律和交换律；给数和空间向量的乘积下定义，并证明这种乘积的性质：结合律和两种分配律；还给空间向量的数性积下定义，并证明分配律。

平行于某一直线的空间二向量叫做共线向量。平行于某一平面的空间三向量叫做共面向量。如果向量 a 和 b 共线并且向量 $a \neq 0$，则向量 b 可有唯一的表示法

$$b = \lambda a.$$

如果三向量 a、b、c 共面，而向量 a 和 b 均异于零，且不共线，则向量 c 可有唯一的表示法

$$c = \lambda a + \mu b.$$

为了证明这条性质，我们首先取三向量 a'、b'、c' 使其位于同一平面并分别等于向量 a、b、c，则

$$c' = \lambda a' + \mu b'.$$

再把 a'、b'、c' 换成和它们相等的向量 a、b、c 即得证。

空间向量的下述性质是新的。**设向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 均异于零，且不共面。则任意向量 $\mathbf{d}$ 可唯一地表示为**

$$\mathbf{d} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c}. \qquad (3)$$

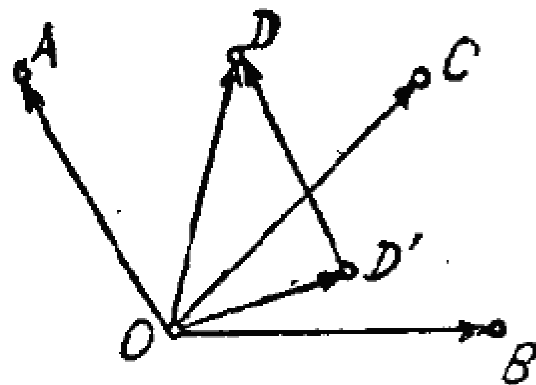


图 251

事实上，我们从任意一点 O 引向量 OA、OB、OC、OD 使其分别等于向量 a、b、c、d（如图251）。过 D 点引直线平行于 OA，此直线交向量 OB 和 OC

所在的平面于某点D'（因向量a、b、c不共面），我们有向量等式

$$OD=OD'+D'D.$$

由于向量$D'D$与向量a是共线的，故

$$D'D=\lambda a.$$

又由于向量OD'、b、c是共面的，故

$$OD'=\mu b+\nu c.$$

由此可得

$$d=OD=\lambda a+\mu b+\nu c.$$

现在证明这种表示法的唯一性。假定有另一个表示法

$$d=\lambda' a+\mu' b+\nu' c, \qquad (4)$$

(4)减(3)，可得

$$(\lambda'-\lambda)a+(\mu'-\mu)b+(\nu'-\nu)c=0.$$

取a'为垂直于向量b和c的一个非零向量，则以a'数性地乘这个等式，即可得

$$(\lambda'-\lambda)(aa')=0,$$

但因向量a、b、c不共面，故向量a与向量a'不垂直，从而$aa'\neq 0$，因此$\lambda'-\lambda=0$。同理$\mu'-\mu=0$，$\nu'-\nu=0$。

唯一性得证。

和平面迪卡儿坐标一样，我们可引进空间迪卡儿坐标。取三个相互垂直的平面——**坐标面**，它们相交于三条相互垂直的直线——坐标轴。坐标面的交点称**坐标原点**。原点将每一个坐标轴分成两个**半轴**，在每个坐标轴上各取一个半轴，然后在这些半轴上各取单位向量e_1、e_2、e_3（如图252）。

设A为空间任意一点，由于向量e_1、e_2、e_3均异于零，并且是不共面的，故向量OA可唯一地表示如下：

$$OA=xe_1+ye_2+ze_3.$$

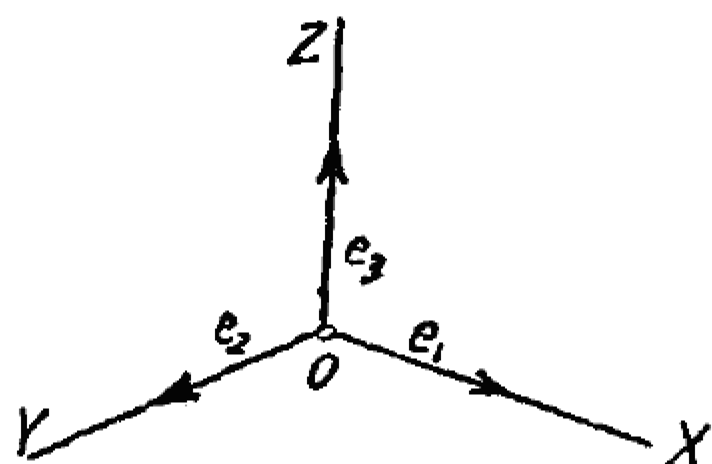


图 252

数 x、y、z 叫做点 A 的**直角迪卡儿坐标**.

和平面一样，我们可以证明**空间两点** $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ **的距离 d 公式为**

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.$$

确定空间曲面方程的方法与确定平面上曲线方程的方法相同。

以 $A_0(x_0, y_0, z_0)$ 为球心，并以 R 为半径的**球面方程为**

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-R^2=0.$$

空间的任何平面的方程为一次方程或线性方程：

$$ax+by+cz+d=0.$$

反之，任意一个这类方程必是某一平面的方程。

空间的一条曲线是由两曲面的交线所确定，如果

$$f_1(x, y, x)=0, \ f_2(x, y, z)=0$$

是两个曲面的方程，并且相交于某一条曲线，则方程组

$$\begin{cases} f_1(x, y, z)=0, \\ f_2(x, y, z)=0. \end{cases}$$

是该曲线方程。

然而，两个平面的交线是一**条直线**. 因此，空间内的一条直线可以用线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0. \end{cases}$$

来表示。已知的直线同时经过上述两个不同的平面。

习　题

1. xy面上满足下列等式的点(x, y)位于何处：

   1）$|x| = a$；

   2）$|x| = |y|$？

2. xy面上满足下列不等式的点(x, y)位于何处：

   1）$|x| < a$；

   2）$|x| < a$，$|y| < b$？

3. 求点$A(x, y)$关于x轴、y轴、坐标原点的对称点的坐标。

4. 如果坐标原点变换为$A_0(x_0, y_0)$，而坐标向量e_1和e_2不变，问点$A(x, y)$的坐标怎样变化？

5. 取平面直角坐标的横轴和纵轴为正方形的对角线（对角线长等于2），试求这个正方形各边中点的坐标。

6. 已知(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)是在同一条直线上的三个点。怎样知道，其中哪一点在另外两点之间？试证明$(-1, 0)$，$(0, 1)$，$(1, 2)$是在同一条直线上的三个点，并且点$(0, 1)$在点$(-1, 0)$和点$(1, 2)$之间。

7. 如何求x轴上与两点$A(x_1, y_1)$和$B(x_2, y_2)$等距离的点的坐标？试以$A(0, a)$，$B(b, 0)$为例，说明之。

8. 已知三角形各顶点的坐标，怎样求这个三角形外接圆圆心的坐标？试以顶点的坐标$A(0,a)$，$B(b,0)$，$C(0,0)$为例，说明之。

9. 已知一个等边三角形ABC中两个顶点A和B的坐标，试问如何求第三顶点的坐标？试以$A(0, a)$，$B(a, 0)$为例，说明之。

10. 已知一个正方形$ABCD$的两个相对顶点的坐标，如何求另外两个顶点的坐标？试以$A(a, 0)$、$C(0, a)$为例，说明之。

11. 如果三角形ABC是一个直角三角形，角C为直角，试问这三角形的三顶点的坐标应满足什么样的条件？

12. 如果三角形ABC中角A大于角C，试问三角形ABC中三顶点的坐标应满足什么样的条件？

13. 已知四边形$ABCD$各顶点的坐标。试问如何确定这个四边形是一个圆内接四边形？

14. 试证：对于任意实数a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、b_3下面不等式成立：

$$\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}+\sqrt{(a_1-a_3)^2+(b_1-b_3)^2} \geqslant \sqrt{(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2}.$$

并指出与此相应的几何定理。

15. 已知平行四边形中三个顶点的坐标为：(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)，试求第四个顶点及中心的坐标。

16. 已知三角形各顶点的坐标为：(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)试求这个三角形三条中线交点的坐标。

17. 试证明：过两点$A_1(x_1, y_1)$和$A_2(x_2, y_2)$的直线上任意点的坐标可由下面公式表示：

$$x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,$$
$$y=\lambda y_1+(1-\lambda)y_2.$$

问什么样的参数值λ对应线段A_1A_2上的各点？

18. 如果

1）$a=0$；2）$b=0$；3）$c=0$；

4）$a=0$，$b=0$；5）$a=0$，$c=0$；

6）$b=0$，$c=0$？

问圆

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0$$
$$(a^2+b^2-c>0)$$

在平面直角坐标系中，其位置的特征如何？

19．证明：如果圆的方程

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$
$$(a^2+b^2-4c>0)$$

的左端代入这个圆域外任意点的坐标，那么所得的值就是从这点到圆所作切线的长度平方。

20．已知直线方程 $x+y-c=0$ 和圆的方程 $x^2+y^2=1$，问 c 为何值时，直线与圆有两个交点？直线与圆相切？直线与圆周不相交？

21．设

$$x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad (a_1^2+b_1^2-4c_1>0),$$
$$x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0 \qquad (a_2^2+b_2^2-4c_2>0)$$

是两个相交的圆的方程。证明：过这两个已知圆的两个交点的任意圆的方程为

$$\lambda(x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1)$$
$$+\mu(x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2)=0,$$

式中 λ 和 μ 是两个常数。

求出过两已知圆的两个交点和点 (x_0, y_0) 的圆的方程。

求出过两已知圆的两个交点的直线方程。

22．证明：平面直角坐标系的两个坐标轴和两轴夹角的两条平分线都是已知方程

$$x^4+y^4=1$$

所表曲线的对称轴，而原点是这曲线的对称中心。

23．已知两条曲线 γ_1 和 γ_2 的方程为

$$f(x,y)=0, \quad f(x,y)+ax+by+c=0.$$

证明：这两条曲线的交点（如果它们有交点）位于同一条直线上。

24. 证明：方程

$$a^2x^2+2abxy+b^2y^2-c^2=0$$

表示一对直线。试求每一条直线的方程。

25. 已知

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

是两条相交直线的方程。证明：过这两条直线交点的任意一条直线的方程可以写成

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2)=0,$$

式中 λ 和 μ 是两个常数。

证明：过这两条已知直线交点和点 $A_0(x_0, y_0)$ 的直线方程为

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_1x_0+b_1y_0+c_1}-\frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_2x_0+b_2y_0+c_2}=0.$$

26. 已知

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

是两条相交直线的方程。证明：这两条直线相交所夹之角的两条平分线方程为

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}=0.$$

27. 如果动点到已知两条相交直线的距离之比为常数，试证动点的轨迹为两条直线。如果已知两条直线的方程为

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0,$$

而距离的比为k，试求上述轨迹的方程。

28. 证明：在平面xy上，如果动点到两轴距离之和为$a>0$，那么动点的轨迹就是以两轴上四点$(0,\pm a)$、$(\pm a,0)$为顶点的正方形的各条边。

29. 已知直线

$$ax+by+c=0,$$

而$A_1(x_1,y_1)$和$A_2(x_2,y_2)$是这条直线外的两个点。证明：如果点A_1和A_2对已知直线而言位于同一侧，那么

ax_1+by_1+c和ax_2+by_2+c符号相同；

如果点A_1和A_2对已知直线而言位于异侧，那么ax_1+by_1+c和ax_2+by_2+c的符号必相反。

30. 已知一个三角形各顶点的坐标，如何求这个三角形内切圆圆心的坐标？以三顶点坐标：(1,0)，(1,1)，(0,1)，为例，试说明之。

31. 证明：求三角形面积的公式可改写成

$$S=\frac{1}{2}\left|(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)\right|.$$

以折线$A_1A_2\cdots A_n$为边界的任意多边形的面积可由下列公式计算：

$$S=\frac{1}{2}\left|\sum_k(x_ky_{k+1}-x_{k+1}y_k)\right|.$$

32. 关于点O的反演变换指的是平面自身映象，在变换过程中异于O点的任意一点A与射线OA上的点A'相对应，并且$OA\cdot OA'=k^2$（k^2是一个常数）。试取O为原点，求出以点A坐标所表示的点A'的坐标公式。

试证经过反演变换圆变为圆或直线，试问在什么条件下

圆变为直线？经过反演变换任意直线变成什么？

33. 借助于反演变换，把作一个圆和两个已知相交圆相切，并经过一个已知点的问题，化为作一个圆和两条已知直线相切，并经过一个已知点的问题。

34. 证明：经过平面xy自身映象，任意点x，y与点x'，y'相对应，如果

$$a_1^2+a_2^2=1,\quad b_1^2+b_2^2=1,$$

$$a_1b_1+a_2b_2=0,$$

则根据公式

$$x'=a_1x+b_1y+c_1,$$

$$y'=a_2x+b_2y+c_2,$$

平面xy自身映象是运动。

§31. 旋转体的体积

体积的一般定义 在§26我们研究过简单体的体积，所谓简单体指的是能分割成有限个三棱锥的几何体。这种体的体积等于组成该体的所有三棱锥的体积之和，而三棱锥的体积公式 $V=\frac{1}{3}SH$。现在根据这种观点我们来确定任意几何体的体积概念。

体V的体积指的是具有下列两条性质的数V。

1）数V不大于包含所给体T的任意简单体的体积；

2）不存在大于数V，而又具有性质1）的数。

因此，数V是所有具有性质1)的数中最大的。如果T为简单体，则所给出T的体积就是T的原来体积，因为在包含T的简单体中，T本身是其中之一。

由体积定义，我们可直接推出有关体积的若干性质。

如果体T_1被包含在体T_2内，那么体T_1的体积不大于体T_2的体积。事实上，任意一个包含体T_2的简单体必包含体T_1，因此，体T_1的体积V_1不大于这个简单体的体积，而体T_2的体积V_2是具有这种性质的数中的最大的，故$V_1 \leqslant V_2$。

如果体T_1全等于体T_2，那么它们的体积相等。事实上，如果体T_1包含在简单体T'_1内，那么，体T_2能包含在全等于T'_1的简单体T'_2内。因此，V_2不大于包含体T_1的任意简单体的体积，而V_1是具有这条性质数中的最大的数，故$V_2 \leqslant V_1$。如果调换T_1和T_2，可得相反的不等式：$V_1 \leqslant V_2$，所以$V_1 = V_2$。

如果两个几何体T_1及T_2相似，那么它们的体积之比等于它们线性尺寸的立方比。

事实上，如果体T_1包含在体积为x的简单体内，那么T_2包含在体积为k^3x的相似简单体内，而k为相似系数。因此，$V_2 \leqslant k^3x$，即$\frac{V_2}{k^3} \leqslant x$。由此数$\frac{V_2}{k^3}$不大于包含体$T_1$的任何简单体的体积，而数$V_1$是具有这种性质数中的最大的数，故$\frac{V_2}{k^3} \leqslant V_1$，即$V_1k^3 \geqslant V_2$。如果调换$T_1$和$T_2$，可得相反的不等式$V_1k^3 \leqslant V_2$。由此可得$V_1k^3 = V_2$，即$\frac{V_2}{V_1} = k^3$。

如果一个几何体被平面、圆锥面、圆柱面或球面所分割，那么这个几何体的体积等于分割所得诸体的体积之和。

证明这定理的根据在于：平面、圆柱面、圆锥面或球面的任意有限部分必包含在一个体积可任意小的简单体之内。对于一块平面，这是很明显的，只须取一个正方形包含那块已知平面，然后以这个正方形为底，任意小的高度为高，做

一个平行六面体。对于其它三种曲面，我们将在下面证明这条性质。

为明确起见，设体T被一块圆柱面分成两个体T_1和T_2，设V_1和V_2为T_1和T_2的体积，而V为T的体积。

设ε是一个任意小的正数。作一个简单体T'_1包含体T_1，但T'_1的体积不大于$V_1+\varepsilon$，这样的简单体T'_1必存在。否则，所有包含T_1的简单体体积均大于$V_1+\varepsilon$，从而体T_1的体积不小于$V_1+\varepsilon$。作简单体T'_2包含体T_2，而T'_2的体积不大于$V_2+\varepsilon$。由T'_1和T'_2组成的简单体T'的体积不大于$V_1+V_2+2\varepsilon$。简单体T'包含体T，因而体T的体积不大于体T'的体积。由此可得

$$V\leqslant V_1+V_2+2\varepsilon,$$

由于ε可以任意小，故由此不等式推出

$$V\leqslant V_1+V_2. \qquad (1)$$

现在作一个简单体T'包含体T，并且T'的体积不大于$V+\varepsilon$，简单体T'被圆柱面分成两个体T'_1和T'_2。再作一个体积不大于ε的体S'，并使它包含T'_1和T'_2的公共边界，把简单体S'分别增并于T'_1和T'_2中，我们便得两个简单体T''_1和T''_2，它们分别包含体T_1和T_2。体T''_1和T''_2的体积之和不大于$V+2\varepsilon$，因此$V_1+V_2\leqslant V+2\varepsilon$。由于$\varepsilon$可以任意小，故

$$V_1+V_2\leqslant V. \qquad (2)$$

把不等式（1）和（2）进行比较即可得出

$$V_1+V_2=V.$$

这正是所求证的。

圆柱的体积

定理31.1　圆柱的体积等于底面积与高的乘积.

证明　作圆柱的内接正 n 棱柱和外切正 n 棱柱. 内接正 n 棱柱被包含在圆柱内，所以它的体积不大于圆柱的体积，外切正 n 棱柱包含圆柱，所以它的体积不小于圆柱的体积.

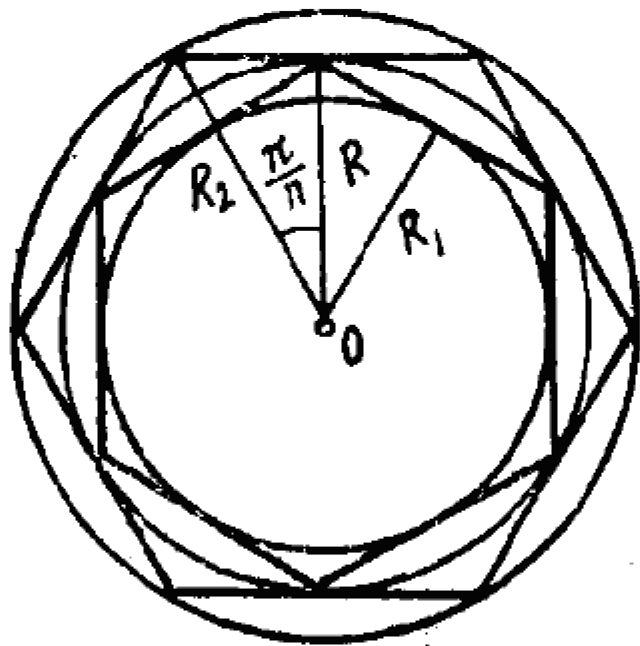


图　253

作内接棱柱底面的内切圆（如图253），这圆的半径为

$$R_1 = R\cos\frac{\pi}{n},$$

其中 R 为圆柱的底半径，内接棱柱的底面积不小于包含在底面内的半径为 R_1 的圆域的面积. 因此，内接棱柱的体积不小于 $\pi R_1^2 H = \pi R^2 H\cos^2\frac{\pi}{n}$，其中 H 为圆柱之高，由此可得圆柱的体积

$$V \geqslant \pi R^2 H\cos^2\frac{\pi}{n}. \qquad (1)$$

现在作外切棱柱底面的外接圆，这圆周的半径为

$$R_2 = \frac{R}{\cos\frac{\pi}{n}}.$$

外切棱柱的底面被包含在半径为 R_2 的圆域内，故外切棱柱的底面积不大于

$$\pi R_2^2 = \frac{\pi R^2}{\cos^2\frac{\pi}{n}},$$

相应地，圆柱的体积

$$V \leqslant \frac{\pi R^2 H}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}. \qquad (2)$$

所得的不等式（1）和（2）对于任意n均成立。在$n \to \infty$时，则$\cos\frac{\pi}{n} \to 1$，因此由不等式（1）可得

$$V \geqslant \pi R^2 H,$$

而由不等式（2）可得

$$V \leqslant \pi R^2 H,$$

因此

$$V = \pi R^2 H,$$

这正是所求证的。

注意：如果从外切棱柱内去掉内接棱柱，那么我们得到一个简单体，而这简单体包含圆柱的侧面，这简单体的体积等于两棱柱的体积之差，即等于

$$\pi R^2 H\left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} - \cos^2 \frac{\pi}{n}\right).$$

当$n \to \infty$时，这体积趋近零。由此可见：圆柱面的任意有限部分必包含在一个体积可任意小的简单几何体内。

圆锥的体积

定理31.2　圆锥的体积等于底面积与高的乘积的三分之一。

证明：　作圆锥的内接正n棱锥与外切正n棱锥。内接正n棱锥在圆锥之内，所以它的体积不大于圆锥的体积；外切正n棱锥包含圆锥，所以它的体积不小于圆锥的体积。

作内接棱锥底面的内切圆（如图253），这圆的半径为 $R_1=R\cos\frac{\pi}{n}$。内接棱锥底面的面积不小于包含在这底面内半径为 R_1 的圆域的面积，因此内接于圆锥的棱锥体积不小于

$$\frac{1}{3}\pi R_1^2 H=\frac{1}{3}\pi R^2 H\cos^2\frac{\pi}{n},$$

其中 H 为圆锥的高。由此可得，圆锥的体积

$$V\geqslant\frac{1}{3}\pi R^2 H\cos^2\frac{\pi}{n}. \qquad (1)$$

现在作外切棱锥底面的外接圆，这圆周的半径 $R_2=\frac{R}{\cos\frac{\pi}{n}}$。外切棱锥的底面在半径为 R_2 的圆域内，因此，外切棱锥的底面积不大于 $\pi R_2^2=\frac{\pi R^2}{\cos^2\frac{\pi}{n}}$，圆锥的体积

$$V\leqslant\frac{1}{3}\frac{\pi R^2 H}{\cos^2\frac{\pi}{n}}. \qquad (2)$$

所求得的不等式（1）和（2）对于任意 n 均成立。在 $n\to\infty$ 时，$\cos\frac{\pi}{n}\to 1$。因此由不等式（1）可得出：

$$V\geqslant\frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

而由不等式（2）可得

$$V\leqslant\frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

因此

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

这正是所要求证的。

注意：如果我们自外切棱锥去掉内接棱锥，那么我们可得到一个包含圆锥侧面的简单体，这简单体的体积等于这两棱锥的体积之差，即

$$\frac{1}{3}\pi R^2 H\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}-\cos^2\frac{\pi}{n}\right),$$

当 $n\to\infty$ 时，此体积趋于零。因此可得：圆锥面的任意有限部分必包含在体积可以任意小的简单体内。

定理31.3　底半径分别为 R_1 和 R_2，高为 H 的圆台体积

$$V=\frac{1}{3}\pi H(R_1^2+R_1R_2+R_2^2).$$

这个公式的导出与棱台的体积公式的导出方法相同，这里我们不再重复。

球的体积

定理31.4　半径为R的球的体积为

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

证明　经过球心的平面把球分成两个全等部分，即两个半球体，因此，只须求半球体的体积。为了方便起见，我们把半球体放置成如图254所示的位置，作一个半径垂直于半球体的底面，并把这半径分成 n 等份，过各等分点作平面平行于半球体的底面，这些平面把半球体分割成 n 个薄层（如图254左），对于每一薄层，以它的下底半径为半径，以这薄层的厚度为高作一个包含这薄层的圆柱，以 V_m 表示第 m 层（从半球体的底面算起）圆柱的体积。

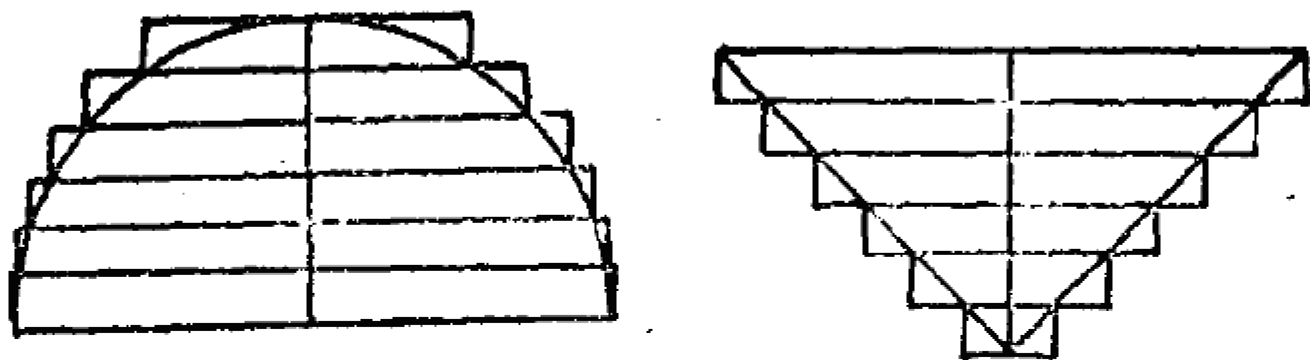


图 254

由所作圆柱组成的体包含半球体，因而它的体积不小于半球体的体积．如果把所有圆柱均向下降一个距离$\frac{R}{n}$，那么除第一个圆柱外，所有其它圆柱均落在半球体内．因此除第一个圆柱外，所有其它圆柱所组成的体的体积不大于半球体的体积．以V表示半球体的体积，可得不等式

$$V_2+V_3+\cdots+V_n\leqslant V\leqslant V_1+V_2+\cdots+V_n. \quad (1)$$

现在取一个底半径为R，高也是R的圆锥．我们用分割半球体的方法把这圆锥分成薄层，并对于每一薄层作包含这薄层的圆柱（如图254右），以V'_m表示第m层（从圆锥的顶点算起）圆柱的体积，这些圆柱所组成的体的体积不小于圆锥的体积．如果把所有圆柱升高$\frac{R}{n}$，那么除最末一层外，其它所有圆柱均包含在圆锥内．因此这些被包含在圆锥内的圆柱所组成的体的体积不大于圆锥的体积．以V'表示圆锥的体积，可得不等式

$$V'_1+V'_2+\cdots+V'_{n-1}\leqslant V'\leqslant V'_1+V'_2+\cdots+V'_n. \quad (2)$$

现在来求两个体积之和V'_m+V_{m+1}．根据勾股定理，对半球体来说，第$m+1$个圆柱的底半径等于

$$\sqrt{R^2-\left(\frac{m}{n}R\right)^2},$$

因而体积为

$$V_{m+1}=\pi\left[R^2-\left(\frac{m}{n}R\right)^2\right]\frac{R}{n}.$$

对圆锥来说，第 m 个圆柱的底半径为$\frac{m}{n}R$，因而体积为

$$V'_m=\pi\left(\frac{m}{n}R\right)^2\frac{R}{n}.$$

我们看出

$$V_{m+1}+V'_m=\frac{\pi R^3}{n}.$$

注意

$$V_1=\frac{\pi R^3}{n}, \qquad V'_n=\frac{\pi R^3}{n}.$$

把不等式（1）与（2）相加，可得

$$\frac{n-1}{n}\pi R^3\leqslant V+V'\leqslant\frac{n-1}{n}\pi R^3+V_1+V'_n=\frac{n+1}{n}\pi R^3.$$

由于这些不等式对任意 n 均成立，而在 $n\to\infty$时，

$$\frac{n-1}{n}\to 1, \quad \frac{n+1}{n}\to 1,$$

故有

$$\pi R^3\leqslant V+V'\leqslant\pi R^3,$$

由此可得

$$V+V'=\pi R^3.$$

因为圆锥的体积为$V'=\frac{1}{3}\pi R^3$，故半球体的体积等于

$\frac{2}{3}\pi R^3$，而球体的体积等于$\frac{4}{3}\pi R^3$。定理得证。

平面截球成两部分，每一部分都叫**球缺**（图255）。**球缺的体积公式为**

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right),$$

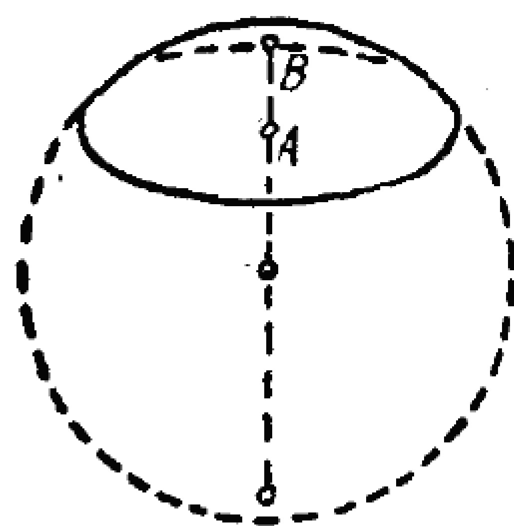


图 255

其中R表示球的半径，而H为球缺的高（球缺的高指的是垂直于截平面的直径在球缺中那部分线段AB）。这个公式的证法与证明半球体体积公式方法相同。

球扇形 是由球缺和圆锥按下述方法构成，如果球缺小于半球体，则球扇形是一个以球缺的底面为底面，而以球心为顶点的圆锥附加到球缺上；如果球缺大于半球体，那么球扇形是球缺挖去上述圆锥体（如图256）。因此球扇形的体积可由相应的球缺体积加上或减去相应圆锥的体积得出。**球扇形的体积公式为**

$$V=\frac{2\pi R^2H}{3},$$

其中R为球体的半径，而H为相应的球缺的高。

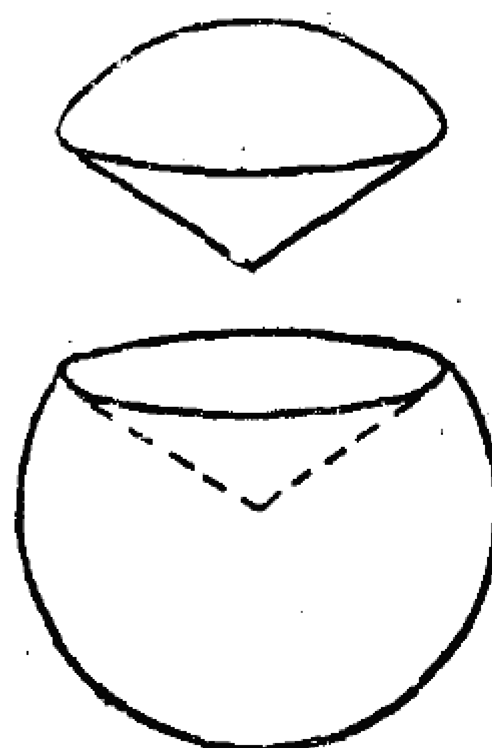


图 256

现在我们来证球能包含在体积可以任意小的简单体内。设R为球的半径，作两个半径为$R-\varepsilon$和$R+\varepsilon$的同心球T_1和T_2，其中ε为任意小的

正数。把空间分割成对角线小于 ε 的小立方体，现在按下述方式作两个简单体 T'_1 和 T'_2，体 T'_1 由球 T_1和所有与T_1起码有一个公共点的小立方体组成，体 T'_2 是由球T_2去掉所有包含 T_2 体上及体外的点的那些小立方体得来。

体T'_1的体积不小于球T_1的体积，即不小于$\frac{4}{3}\pi(R-\varepsilon)^3$；体$T'_2$的体积不大于球体$T_2$的体积，即不大于$\frac{4}{3}\pi(R+\varepsilon)^3$。体$T'_2$去掉体$T'_1$所得的简单体包含已知球，并且这个简单体的体积不大于

$$\frac{4}{3}\pi\{(R+\varepsilon)^3-(R-\varepsilon)^3\}=\frac{8}{3}\pi(3R^2+\varepsilon^2)\varepsilon.$$

对于充分小的 ε，这个简单体的体积可任意小，这正是所要求证的。

§32. 旋转体的表面积

凸表面的面积概念 完全凸表面指的是凸体的边界，而凸体指的是这样的体：即体上任意两点和连结这两点的线段都属于这体。凸体有凸多面体、圆柱、圆锥和球等。

对完全凸表面上的图形，就象对§24平面上的图形一样，可引用内点和界点的概念，也就是说，如果在凸表面 F 上与点X充分近的所有点均属于图形G，那么 F上的图形G的点X叫做G的内点；点Y叫做G的界点，它指的是F上与点Y充分近的点有些附属于G，有些不属于G。

用平面截完全凸表面，所得的图形是由凸表面上位于平面同一侧的所有点组成。除截面上的点外，全部点均为这图形的内点，而截面上的点是界点。

如果图形的所有点均为内点，并且它又不能分成两个具

有这种性质的图形，则完全凸表面上的图形称为区域。如果把一个区域的边界附加到这个区域上，那么我们得到一个闭区域，简称凸表面。例如：圆锥、圆柱和球缺的侧面都是凸表面。

为了对下述凸表面面积的定义不感到突然，我们研究一个实际问题。设有一个圆屋顶和一块一米见方的平铁板，并在它们的表面涂以同厚度的涂料。设在圆屋顶表面上用U_1公斤涂料，而在平铁板表面上用U_2公斤涂料，则我们认为，圆屋顶的表面积是平铁板表面积的$\frac{U_1}{U_2}$倍，数$\frac{U_1}{U_2}$就是圆屋顶表面积的平方米数。涂平铁板所用涂料的数量大约等于底面为1米×1米、高为所涂涂料厚度h的平行六面体的体积，因此圆屋顶的表面积约为$\frac{U_1}{h}$。

现在我们给凸表面面积下定义。设F是一个已知的凸表面，作一个体F_h，它是由每一个到凸表面F的距离不大于h的空间点组成，可把体F_h想象为凸曲面F的两面均涂以厚为h的涂料所得的体。

设V_h是体F_h的体积，凸表面F的面积S指的是比值$\frac{V_h}{2h}$在$h\to 0$时的极限，即

$$S=\lim_{h\to 0}\frac{V_h}{2h}.$$

球面的面积

定理32.1 半径为R的球面的面积等于$4\pi R^2$.

证明 设F为已知的球面，在上述凸表面面积定义中所提到的体F_h是半径为$R+h$和$R-h$的两个同心球所

夹的薄层（如图257），体 F_h的体积等于半径为$R+h$和$R-h$的两个球体的体积之差，即

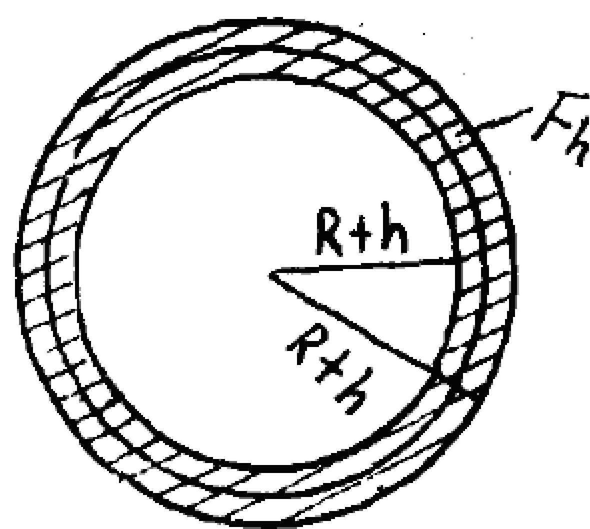


图 257

$$V_h=\frac{4}{3}\pi[(R+h)^3-(R-h)^3],$$

于是有

$$\frac{V_h}{2h}=\frac{4\pi}{3\cdot 2h}(6hR^2+2h^3)=4\pi R^2\left(1+\frac{h^2}{3R^2}\right);$$

当$h\to 0$时，比值$\frac{V_h}{2h}$趋于极限$4\pi R^2$。这正是所要求证的。

就球面而言，确定体 F_h的体积 V_h是简单的，而在其它情况下，这可能是十分困难的课题。由于我们只是求凸表面的面积，即$\lim\limits_{h\to 0}\frac{V_h}{2h}$，所以我们可将体 F_h换为其它任意体，只要能给出比$\frac{V_h}{2h}$的相同极限值。现在我们指出，怎样变化体 F_h，也不改变我们所要求的极限 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{V_h}{2h}$。

设所考虑的凸表面的边界是由一些线段和圆弧组成。取任意一个固定的数 $a>1$，并以F'_{ah}表示这样一个体，它是由每一个到凸表面边界的距离不大于ah的空间点所组成。

定理32.2 如果体 F_h 在凸表面边界的邻近，并以任意方式在体F'_{ah}内变化，那么 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{V_h}{2h}$不变。

证明 显然体F_h的体积变化不大于体F'_{ah}的体积 V'_{ah}，因此只须证明当$h\to 0$时，比$\frac{V'_{ah}}{2h}\to 0$。

按题设所研究的凸表面的边界由一些线段和圆弧组成。如果我们对每一段直线或圆弧作相应的体F'_{ah}，那么所有这些体将掩盖与整个边界有关的体F'_{ah}。因此只须对每一条直线和每一个圆弧所做的体F'_{ah}，证明$\frac{V'_{ah}}{2h}\to 0$就可以了。

当直线线段的长度为l时，体F'_{ah}包含在半径为ah，长为$l+2ah$的一个圆柱内，这个圆柱的体积为$\pi a^2h^2(l+2ah)$。当$h\to 0$时，比$\frac{\pi a^2h^2(l+2ah)}{2h}\to 0$，因此$\frac{V'_{ah}}{2h}\to 0$。

当圆弧的半径为R时，体F'_{ah}可包含在一个圆环内，这圆环是由半径为$R+ah$、高为$2ah$的圆柱去掉半径为$R-ah$、高为$2ah$的同轴圆柱而得出的，圆环的体积等于两圆柱的体积之差：$\pi[(R+ah)^2-(R-ah)^2]2ah=8\pi a^2h^2R$。由于当$h\to 0$时，$\frac{8\pi a^2h^2R}{2h}\to 0$，故对圆弧来说，$\frac{V'_{ah}}{2h}\to 0$。定理得证。

球缺的凸表面积

定理32.3 半径为R高为H的球缺的凸表面的面积等于

$$S=2\pi RH.$$

证明 设F是一个半径为R的球缺，作与之相应的体F_h（如在凸表面面积的定义中所提到的）（如图258），则球缺的面积等于$\lim\limits_{h\to 0}\frac{V_h}{2h}$.根据定理32.2，如果体$F_h$只在边界邻近作如该定理中所述的变化，则$\lim\limits_{h\to 0}\frac{V_h}{2h}$不变。

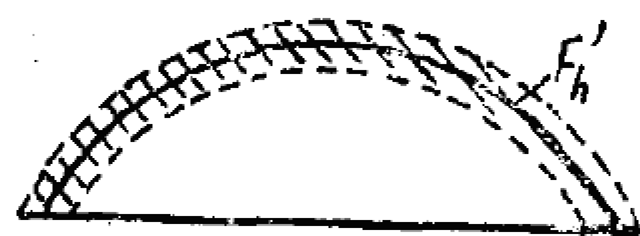


图 258

我们使这种变化的距离不超过$\frac{h}{\cos\alpha}$，其中α为球缺在边缘的

切平面与球缺底面所夹之角。变化后体F_h被换成半径为$R+h$和$R-h$的两个同心球面和已知球缺底面三者所围成的体。我们用F'_h表此体，而以V'_h表示此体的体积，此时$\lim\limits_{h\to 0}\frac{V_h}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{V'_h}{2h}$。

体F'_h的体积等于以$R+h$为半径$H+h$为高的球缺与以$R-h$为半径、$H-h$为高的球缺之差。于是

$$V'_h=\pi(H+h)^2\left[(R+h)-\frac{H+h}{3}\right]$$

$$-\pi(H-h)^2\left[(R-h)-\frac{H-h}{3}\right]$$

$$=4\pi RHh+\frac{4}{3}\pi h^3.$$

当$h\to 0$时，比$\frac{V'_h}{2h}\to 2\pi RH$。定理得证。

圆柱的侧面积

定理32.4　底半径为R、高为H的圆柱侧面积等于2πRH。

证明　设F为圆柱的侧表面。作与之相应的体F_h（如在凸表面面积的定义中所提到的），则圆柱的侧表面积等于$\lim\limits_{h\to 0}\frac{V_h}{2h}$。根据定理32.2，如果$F_h$只在边界邻近作不超过距离$h$的变化，那么$\lim\limits_{h\to 0}\frac{V_h}{2h}$不变。变化后体$F_h$被换成半径为$R+h$、高为$H$的圆柱去掉半径为$R-h$、高为$H$的圆柱（如图259），这

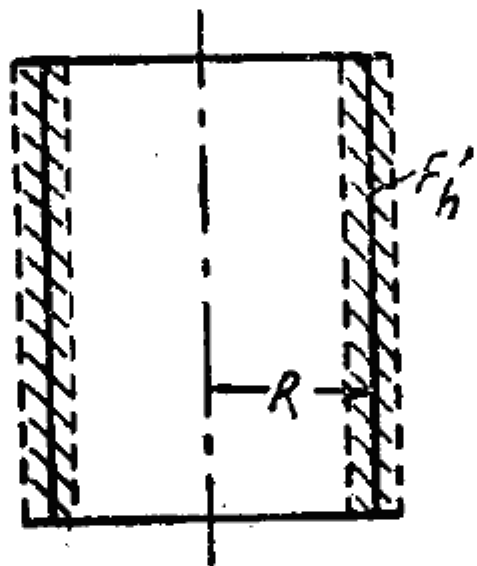


图　259

个体我们记作F'_h，并以V'_h表示它的体积，F'_h的体积等于两圆柱的体积之差，即

$$V'_h=\pi(R+h)^2H-\pi(R-h)^2H=4\pi RHh.$$

当$h\to 0$时，可有$\frac{V'_h}{2h}\to 2\pi RH$。这正是所要求证的。

圆台的侧面积

定理32.5　设R_1R_2分别为两底之半径，l是母线长，则圆台的侧面积为

$$S=\pi(R_1+R_2)l.$$

证明　设F是已知圆台的侧面，对侧面F作体F_h。圆台侧面积等于$\lim\limits_{h\to 0}\frac{V_h}{2h}$。根据定理32.2，如果体$F_h$只在侧面$F$的边界作距离不超过$\frac{h}{\sin\alpha}$的变化，那么$\lim\limits_{h\to 0}\frac{V_h}{2h}$不变。$\alpha$为母线与底平面的夹角。

作两个与侧面F同轴的圆台的侧面F_1和F_2。F_1和F_2的母线在轴截面与F的母线平行，并且各在F的两侧与F相距h（如图260）。我们用体F'_h代替体F_h，体F'_h是由两圆台侧面F_1和F_2与已知侧面F的两底平面围成。

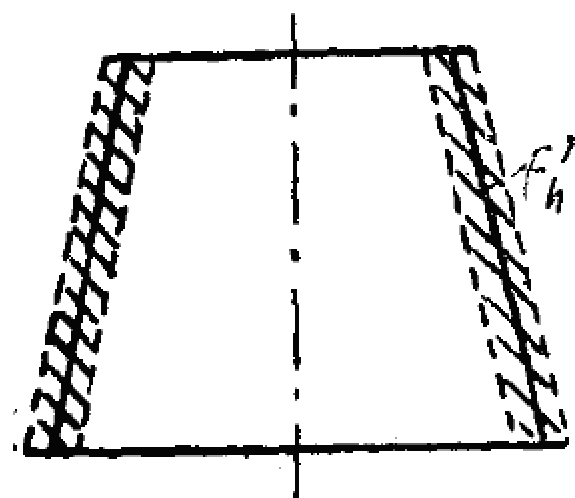


图　260

体F'_h的体积V'_h等于两个与已知圆台等高的圆台体积之差，其一个圆台的上、下底半径分别为

$$R_1+\frac{h}{\sin\alpha},\quad R_2+\frac{h}{\sin\alpha},$$

而另一个圆台的上、下底半径分别为：

$$R_1-\frac{h}{\sin\alpha},\qquad R_2-\frac{h}{\sin\alpha}.$$

因而

$$V'_h=\frac{1}{3}\pi H\left\{\left(R_1+\frac{h}{\sin\alpha}\right)^2+\left(R_1+\frac{h}{\sin\alpha}\right)\left(R_2+\frac{h}{\sin\alpha}\right)\right.$$

$$\left.+\left(R_2+\frac{h}{\sin\alpha}\right)^2\right\}-\frac{1}{3}\pi H\left\{\left(R_1-\frac{h}{\sin\alpha}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(R_1-\frac{h}{\sin\alpha}\right)\left(R_2-\frac{h}{\sin\alpha}\right)+\left(R_2-\frac{h}{\sin\alpha}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{2\pi Hh(R_1+R_2)}{\sin\alpha}.$$

当 $h\to 0$ 时

$$\frac{V'_h}{2h}\to\frac{\pi(R_1+R_2)H}{\sin\alpha},$$

而$\dfrac{H}{\sin\alpha}$是侧面 F 的母线长 l．因此圆台侧面的面积

$$S=\pi(R_1+R_2)l.$$

圆锥的侧面积也可由此式令 $R_2=0$ 得出。

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝基础几何学
作者＝Ａ．Ｂ．勃格莱洛夫
页数＝２９７
ＳＳ号＝１００６８５２４
出版日期＝１９８１年０５月第１版

交弦定理和切割定理
直线和圆相交
两个作图题
相似图形　　同位相似
复习题及练习题

１３．勾股定理及其应用

勾股定理
斜三角形各边之间的关系
平行四边形各边与对角线之间的关系
已知三边的三角形的存在的条件
两圆的位置关系
两个例题
复习题及练习题

１４．三角函数

三角函数的定义
诱导公式
直角三角形中边和角之间的关系
余弦定律
正弦定律
复习题及练习题

１５．多边形

凸多边形
凸多边形内角之和
多边域　　凸折线
正多边形
圆的内接多边形和外切多边形
相似多边形
复习题及练习题

１６．图形的面积

面积的概念
矩形的面积
简单图形的面积
简单图形的面积与它分割成三角形的方法无关
相似图形的面积
复习题及练习题

１７．圆的周长和圆域的面积

圆的周长
圆弧长　　弧度制
圆域的
复习题及练习题

第二部分　立体几何